

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**YOĞUNLUKLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE
DÖNME EKSENLİ DÖNEL YÜZEYLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA ÖZDOĞRU

TEZ DANIŐMANI

DOÇ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2021

10408964

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ ORTAK PROGRAMI

**YOĞUNLUKLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE
DÖNME EKSENLİ DÖNEL YÜZEYLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA ÖZDOĞRU

TEZ DANIŐMANI

DOĐ. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2021

10408964

BEYAN

Yoğunluklu Minkowski Uzayında Lightlike Dönme Eksenli Dönel Yüzeyler adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bu çalışmam, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.	
DESTEK ALINMIŞTIR	DESTEK ALINMAMIŞTIR
Destek alındı ise;	
Destekleyen Kurum:	
Desteğin Türü	Proje Numarası
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)	
2- TÜBİTAK	
Diğer;	

BÜŞRA ÖZDOĞRU

Tarih

İmza

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesi ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren, ihtiyaç duyduğum her an bana kıymetli zamanını ayıran, sabırla destek olan, kendisini tanımaktan büyük onur ve mutluluk duyduğum, saygı değer danışman hocam sayın Doç. Dr. Önder Gökmen YILDIZ'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışma süresince desteklerini her zaman hissettiğim hayatımın her anında yanımda olan başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi sunarım.

Büşra ÖZDOĞRU

2021

ÖZET

YOĞUNLUKLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE DÖNME EKSENLİ DÖNEL YÜZEYLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı ve Minkowski uzaylarında temel kavramlar verilmiş ve yüzeyler tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında dönel yüzeyler ve yoğunluklu yüzeyler tanıtıldı. Ayrıca 3- boyutlu Minkowski uzayında dönel yüzeyler eksen tiplerine göre incelenmiştir.

Dördüncü bölüm ise bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde yoğunluklu 3-boyutlu Minkowski uzayında lightlike dönme eksenli dönel yüzeyler incelenmiştir. Dönel yüzeylerin ağırlıklı ortalama eğriliği ve ağırlıklı Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Ağırlıklı Gauss eğriliğinden hareketle dönel yüzey elde edilmiştir. Son olarak ağırlıklı Gauss eğriliği belli olan dönel yüzeylere ait örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Minkowski Uzayı, Dönel Yüzey, Ağırlıklı Gauss Eğrilik, Ağırlıklı Ortalama Eğrilik.

ABSTRACT

SURFACES OF REVOLUTION WITH LIGHTLIKE AXIS IN MINKOWSKI SPACE WITH DENSITY

This study consists of four chapters. The first chapter is included the introduction part. In the second chapter, basic concepts in 3-dimensional Euclidean and Minkowski are given and surfaces are introduced.

In the third chapter, surfaces of revolution and revolution of surfaces with density are introduced in 3-dimensional Euclidean and Minkowski space. Moreover, surfaces of revolution are examined according to axis types in 3-dimensional Minkowski space.

The fourth chapter is the original part of this study. In this chapter, surfaces of revolution with lightlike axis are examined in Minkowski space with density. The surfaces of revolution weighted mean curvature and weighted Gaussian curvature are calculated. By using weighted Gauss curvature, surface of revolution is obtained. Finally, examples surfaces of revolution with weighted Gaussian curvature are given.

Keywords: Euclidean Space, Minkowski Space, Surface of Revolution, Weighted Gaussian Curvature, Weighted Mean Curvature.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vi
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyle.....	3
3. DÖNEL YÜZEYLER	11
3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Dönel Yüzeyle.....	11
3.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Dönel Yüzeyle	12
3.2.1. Spacelike Eksenli Dönel Yüzeyle.....	13
3.2.2. Timelike Eksenli Dönel Yüzeyle	14
3.2.3. Lightlike Eksenli Dönel Yüzeyle	14
3.3. Yoğunluklu Yüzeyle	17
4. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA YOĞUNLUKLU DÖNEL YÜZEYLER .	19
KAYNAKÇA	26

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1. K_{φ} Değişkenine Bağlı Yüzey Grafiği.....	24
Şekil 4.2 K_{φ} Değişkenine Bağlı Yüzey Grafiği.....	25

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}	: Reel İç Çarpım Uzayı
E^n	: n Boyutlu Öklid Uzayı
V	: Vektör Uzayı
I	: Öklid Uzayında Bir Açık Aralık
\langle, \rangle	: İç Çarpım
$\ , \ $: Norm
M	: Dönel Yüzey
E, F, G	: Birinci Temel Formun Katsayıları
N	: Yüzeyin Birim Normali
e, f, g	: İkinci Temel Formun Katsayıları
H	: Yüzeyin Ortalama Eğriliği
K	: Gauss Eğriliği
H_φ	: Ağırlıklı Ortalama Eğriliği
G_φ	: Ağırlıklı Gauss Eğriliği

1.GİRİŞ

Yüzey teori, hem teorik olarak hem de fizik ve mühendislikte uygulamalarının çok fazla çalışılmasından dolayı diferansiyel geometrinin önemli bir konusudur. Yüzey teorisinin içinde yer alan konulardan bir tanesi de dönel yüzeylerdir. Dönel yüzeyler, helikoidal yüzeylerin özel bir halidir. Dönel yüzey, bir eksen etrafında bir eğri döndürülerek oluşturulan bir yüzeydir. Dönel yüzeyler bu zamana kadar \mathbb{R}^3 uzayında ve farklı uzaylarda, farklı koşullar altında çalışılmıştır. İlk olarak, Delaunay \mathbb{R}^3 uzayında sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliği olan dönel yüzeyleri incelenmiştir (Delaunay, 1841: 309-314). Daha sonra Kenmotsu, ortalama eğriliği belli olan dönel yüzeyleri incelenmiştir (Kenmotsu, 1980: 147-153). Hsiang ve arkadaşları Delaunay'ın verdiği teoremi genelleştirmişlerdir (Hsiang, 1981: 161-177). Beneki ve arkadaşları 3 boyutlu Minkowski uzayında \mathbb{R}_1^3 dönel yüzeyleri çalışmışlardır (Beneki, 2002: 586-614).

Son zamanlarda yeni bir çalışma alanı olan yoğunluklu manifoldlar da yapılan çalışmaların sayısı oldukça artmıştır. Yoğunluklu yüzeyler ile ilgili ilk çalışmalar F. Morgan tarafından yapılmıştır. F. Morgan; bir Riemann manifoldundaki yoğunluğu hem hacmi hem de yüzey alanını ağırlıklandıran pozitif bir fonksiyon olarak tanımlamıştır (Morgan, 2005: 853-858). Daha sonra F. Morgan yoğunluklu manifoldların ortalama ve Gauss eğriliklerini tanımlamış, Poincare hipotezini, Perelman ispatını incelemiş ve Myers teoremini yoğunluklu Riemann manifoldlarına genelleştirmiştir (Morgan, 2006: 455-461). Bu çalışmalardan yararlanılarak yoğunluklu yüzeyler ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. C. Rosales, I. Corwin gibi isimler bunlardan bazılarıdır. Sürekli yoğunluğa sahip Öklid uzayının izoperimetrik problemini inceleyen C. Rosales bir boyutta tek biçimli yoğunluk için izoperimetrik bölgeleri karakterize etmiştir (Rosales, 2008: 27-46). I. Corwin, yoğunluklu manifoldların Gauss Bonnet teoremi ve formülünü, geodezik ve sabit yüzey eğriliğini tanımlamıştır (Corwin, 2006: 1-15).

Yoğunluk fonksiyonu minimal yüzeyler üzerinde de oldukça fazla çalışılmış bir konudur. L. Belarbi, Öklid uzayında lineer yoğunluklu minimal yüzeyler ile ilgili eşitlikleri ifade etmiş ve bazı minimal grafiklerin eşitliklerin çözümlerini karakterize etmiştir. Buna ek olarak radyal yoğunluklu yüzeylerde yoğunluklu Gauss ve Ortalama eğriliğini incelemiştir (Belarbi, 2012: 34-48).

Bu çalışmada, $e^{-y^2-z^2}$ yoğunluklu 3 boyutlu Minkowski uzayında dđnel yzeler incelenmiştir. Ağırlıklı Gauss eğriliği yardımı ile bir dđnel yzeye inşa edilmiş ve elde edilen yzeye ilgili grafikler çizilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir küme ve V , K cismi üstünde tanımlı bir vektör uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu var ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i. $\forall P_1, P_2, P_3 \in A$ için $f(P_1, P_2) + f(P_2, P_3) = f(P_1, P_3)$,

ii. $\forall P_1 \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P_1, P_2) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $P_2 \in A$ noktası vardır

(Hacısalihoglu, 2000: 1).

Tanım 2.1.2. A bir reel afin uzay ve A ile birleşen bir vektör uzayı V olsun. V vektör uzayında

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \begin{cases} u = (u_1, \dots, u_n) \\ v = (v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

olacak şekilde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlı ise A ya Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoglu, 2000: 4).

İç çarpım fonksiyonu yardımıyla uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir.

Tanım 2.1.3. $v \in V$ olmak üzere v nin normu

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 2000: 6).

Tanım 2.1.4. \mathbb{R}^3 reel vektör uzayında $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri verilsin. v

ve w vektörlerinin vektörel çarpımı

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

biçimindedir (Hacısalihoglu, 2006: 58).

Tanım 2.1.5. E^n Öklid uzayında

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \rightarrow d(P, Q) = \|P - Q\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna Öklid metriği denir (Sabuncuoğlu, 2014: 1).

Tanım 2.1.6. E^n bir Öklid uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha &: I \rightarrow E^n \\ s &\rightarrow \alpha(s)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon diferansiyellenebilir ise α ya E^n de eğri denir (Hacısalihoglu, 2000: 139).

Tanım 2.1.7. E^n , n-boyutlu Öklid uzayında alınan bir α eğrisinin

$$\alpha_{*s} \left(\frac{d}{dx} \Big|_s \right)$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir ve $\alpha'(s)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2014: 46).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ ve $\alpha'(s) \neq 0$ sağlanıyor ise yani α eğrisinin hız vektörü her noktada sıfırdan farklı ise eğriye regüler eğri adı verilir (Hacısalihoglu, 2000: 150).

Tanım 2.1.9. $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir α eğrisi ve J açık aralığı üzerinde $h : J \rightarrow E^n$ diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow E^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon diferansiyellenebilir eğri olup β ya α nın h ile yeniden parametrizasyonu denir (Hacısalihoglu, 2000: 142).

Tanım 2.1.10. $\forall s \in I$ için;

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de yay parametresi adı verilir (Hacısalihoglu, 2000: 149).

Tanım 2.1.11. M , \mathbb{R}^3 uzayında irtibatlı bir alt küme olmak üzere, $\forall s \in M$ noktasının bir V komşuluğunda, $U \subset \mathbb{R}^2$ açık alt kümesi olmak üzere

$$\begin{aligned}X &: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow X(u, v)\end{aligned}$$

şeklindeki dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise M ye yüzey adı verilir.

i. $X(U) = V \cap M$ ve $X : U \rightarrow V \cap M$ bir homeomorfizmadır.

ii. $\forall t \in U$ noktasında $(JX)_t$ Jacobien matrisinin rankı 2 dir.

Burada tanımlanan X dönüşümü M yüzeyinin bir parametrizasyonu ya da diğer bir ifadeyle yerel koordinat sistemi olarak adlandırılır. Ayrıca \mathbb{R}^3 uzayında $\forall s \in M$ noktası için $V \cap M$ alt kümesine ise koordinat komşuluğu denir (Bar, 2010: 81).

Tanım 2.1.12. \mathbb{R}^3 uzayında bir M yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktasına

$$I_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, I_p(u_p, v_p) = \langle u_p, v_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna, M üstünde birinci temel form denir.

Ayrıca M nin her bir p noktasına

$$II_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, II_p(u_p, v_p) = \langle S(u_p), v_p \rangle$$

fonksiyonuna karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M üstünde ikinci temel form denir.

$T_p(\mathbb{R}^3)$ uzayında iç çarpım fonksiyonu simetrik olduğundan $\forall p \in M$ için I_p fonksiyonu simetriktir. Ayrıca S_p dönüşümü özeşlenik olduğundan

$$II(v_p, u_p) = \langle S(v_p), u_p \rangle = \langle v_p, S(u_p) \rangle = \langle S(u_p), v_p \rangle = II(u_p, v_p)$$

olur.

Parametrizasyonu $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ şeklinde olan bir M yüzeyinin I . temel formu ve II . temel formu, sırasıyla,

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir. I . ve II . temel formun katsayıları sırasıyla

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle, \tag{2.2}$$

ve

$$e = \langle \varphi_{uu}, \mathbf{N} \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, \mathbf{N} \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, \mathbf{N} \rangle \tag{2.3}$$

şeklindedir, burada

$$\mathbf{N} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır (Sabuncuoğlu, 2014: 217).

Teorem 2.1.13. Parametrizasyonu $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ şeklinde olan bir M yüzeyi verilsin. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden yararlanılarak bu M yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri sırasıyla,

$$H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

ve

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

şeklinde hesaplanır.

Ayrıca ek olarak yüzeyin asli eğrilikleri de sırasıyla

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

olarak hesaplanır (O'Neill, 2006: 226).

Tanım 2.1.14. V reel bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir (O'Neill, 1983: 47).

Tanım 2.1.15. g , V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu durumda

- i. $\forall u \in V, u \neq 0$ olarak alındığında $g(u, u) > 0$ oluyorsa pozitif tanımlı,
- ii. $\forall u \in V, u \neq 0$ olarak alındığında $g(u, u) < 0$ oluyorsa negatif tanımlı,
- iii. $\forall u \in V, u \neq 0$ olarak alındığında $g(u, u) \geq 0$ oluyorsa yarı pozitif tanımlı,
- iv. $\forall u \in V, u \neq 0$ olarak alındığında $g(u, u) \leq 0$ oluyorsa yarı negatif tanımlıdır denir.

Ayrıca

v. $\forall w \in V$ ve $g(u, w) = 0$ iken $u = 0$ ise g bilinear formuna nondejenere aksi durumda dejenere denir (O'Neill, 1983: 46).

Tanım 2.1.16. V bir skalar çarpım uzayı ve W negatif tanımlı bir skalar çarpım tanımlanabilecek V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. W nin boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi ν olmak üzere $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ şeklindedir (O'Neill, 1983: 47).

Tanım 2.1.17. V skalar bir çarpım uzayı olmak üzere ν , V nin indeksi olsun. $\nu = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ şeklinde ise V skalar çarpım uzayına Lorentz uzayı denir (O'Neill, 1983: 140).

Tanım 2.1.18. V bir Lorentz uzayı ve $\nu \in V$ olmak üzere;

- i. $g(\nu, \nu) > 0$ ya da $\nu = 0$ olduğunda ν ye spacelike vektör,

ii. $g(v, v) < 0$ olduğunda v ye timelike vektör,

iii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ olduğunda v ye lightlike (null) vektör denir. Ayrıca

$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$ reel sayısına da v vektörünün normu denir (O'Neill, 1983: 56).

Tanım 2.1.19. V bir Lorentz uzayı olmak üzere V nin bir alt uzayı W olsun.

i. $g|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike alt uzay,

ii. $g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike alt uzay,

iii. $g|_W$ dejenere ise W ya lightlike alt uzay

denir (O'Neill, 1983: 141).

Tanım 2.1.20. \mathbb{R}^n , n -boyutlu standart reel vektör uzayında $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

ve $1 \leq p \leq n$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-p} u_i v_i - \sum_{i=n-p+1}^n u_i v_i$$

eşitliğinde p -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve \mathbb{R}_p^n ile gösterilir (O'Neill, 1983: 55).

Tanım 2.1.21. \mathbb{R}_p^n yarı-Öklidyen uzayında $p=1$ ve $n \geq 2$ ise \mathbb{R}_1^n , yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n -uzay denir (O'Neill, 1983: 55).

Tanım 2.1.22. M bir topolojik uzay olsun. M topolojik uzayı aşağıdaki şartları sağlıyorsa M ye n -boyutlu topolojik manifold (topolojik n -manifoldu) denir.

i. M bir Hausdorff uzayıdır.

ii. M nin herbir açık altcümlesi E^n in bir açık altcümlesine homeomorftur.

iii. M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

(Hacısalıhoğlu, 2000: 15).

Tanım 2.1.23. M manifoldunun her bir p noktasına $T_p(M)$ uzayı üzerinde g_p iç çarpımını karşılık getiren g dönüşümüne M üzerinde bir metrik tensör adı verilir. Ayrıca M manifoldu üzerinde bir metri tensör varsa bu metrik tensörüyle birlikte bu manifolda Riemann manifoldu denir (Sabuncuoğlu, 2014: 469).

Tanım 2.1.24. M diferansiyellenebilir bir manifold ve bu manifold üzerinde tanımlanan sabit indeksli bir metrik tensör g olmak üzere (M, g) sıralı ikilisine bir yarı- Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983: 55).

Tanım 2.1.25. (\mathbb{R}^n, g) bir yarı- Riemann manifoldu olsun. Bu yarı- Riemann manifoldunun indeksi 1 ve $boyM \geq 2$ ise M ye bir Lorentz manifoldu denir. Bu ifadeye göre bir M Lorentz manifoldu için

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n$$

şeklindedir (O'Neill, 1983: 55).

Tanım 2.1.26. \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir $\alpha \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü olsun.

$$\begin{aligned} \kappa : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\| \end{aligned}$$

olarak tanımlanan κ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s)$ de $s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014: 74).

Tanım 2.1.27. \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir $\alpha \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü olsun.

$$\begin{aligned} \tau : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \tau(s) = -\langle B', N \rangle \end{aligned}$$

olarak tanımlanan τ fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu ve $\tau(s)$ de $s \in I$ için, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014: 76).

Tanım 2.1.28. α , \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir eğri ve $T(s)$, α eğrisinin birim teğet vektör alanı olmak üzere

$T\langle s, s \rangle > 0$ olduğunda α eğrisi spacelike eğri,

$T\langle s, s \rangle < 0$ olduğunda α eğrisi timelike eğri,

$T\langle s, s \rangle = 0$ ve $s \neq 0$ olduğunda ise α eğrisine lightlike(null) eğri denir.

Bu tanımdan hareketle eğrinin özel bir hali olan doğruyu ele aldığımızda her doğru doğrultman vektörüne göre isimlendirilir. Alınan doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise timelike doğru ve doğrultman vektör null ise doğru null doğru olarak ifade edilebilir (O'Neill, 1983: 56).

Tanım 2.1.29. n - boyutlu bir yarı- Riemann manifoldun da alınan ve boyutu $(n-1)$ olan bir \overline{M} yarı-Riemann altmanifolduna M nin bir yarı- Riemann hiperyüzeyi denir (O'Neill, 1983: 106).

Tanım 2.1.30. $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri, \mathbb{R}_1^3 , Minkowski uzayında alınan iki vektör olmak üzere

$$(v_3w_2 - v_2w_3, v_1w_3 - v_3w_1, v_1w_2 - v_2w_1)$$

vektörüne v ve w nin vektörel çarpımı denir ve $v \times w$ ya da $v \wedge w$ biçiminde gösterilir.

$$e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \text{ ve } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

olmak üzere

$$v \wedge w = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak kabul edildiğinde $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ şeklinde olup buna karşın saat yönü negatif yön kabul edildiğinde ise ifade $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ şeklini alır (Turgut, 1995: 2-18).

Tanım 2.1.31. \overline{M} , \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olsun. \overline{M} yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımı ise \overline{M} yüzeyine spacelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995: 2-18).

Teorem 2.1.32. \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında $\varphi(u, v)$ parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

yüzeyinin normal bir timelike vektör alanı olduğunda yüzey spacelike yüzeydir. Yani N yüzeyin normal vektör alanı için

$$\langle N, N \rangle < 0$$

ise \overline{M} spacelike yüzeydir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995: 2-18).

Tanım 2.1.33. \bar{M} , \mathbb{R}_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olsun. \bar{M} yüzeyi üzerine indirgenmiş Lorentz metriği negatif tanımlı ise \bar{M} yüzeyine timelike yüzey denir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995: 2-18).

Teorem 2.1.34. \mathbb{R}_1^3 3- boyutlu Minkowski uzayındaki \bar{M} yüzeyinin normal bir spacelike vektör alanı olduğunda yüzey timelike yüzeydir. Yani N yüzeyin normal vektör alanı olmak üzere

$$\langle N, N \rangle > 0$$

ise \bar{M} timelike yüzeydir (Beem ve Ehrlich, 1981; Turgut, 1995: 2-18).

Tanım 2.1.35. \bar{M} , \mathbb{R}_1^3 3- boyutlu Minkowski uzayında $\varphi(u, v)$ parametresiyle verilmiş bir yüzey olsun. N yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \text{ ve } G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,$$

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle \text{ ve } g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle,$$

E, F, G birinci ve e, f, g ikinci temel formların katsayıları olmak üzere ortalama ve Gauss eğrilikleri, sırasıyla

$$H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

eşitlikleri ile bulunur (O'Neill, 2006, Turgut, 1995: 2-18).

3. DÖNEL YÜZEYLER

3-boyutlu Öklidyen uzayında $0x$, $0y$ ve $0z$ eksen doğruları olmak üzere, üç tür dönel yüzey bulunur. Çalışmanın bu bölümde bu yüzeyler tanıtılacaktır. Ayrıca burada, X^T transpozu $X = (x_1, x_2, x_3)$ vektörüyle özdeş olarak alınmıştır.

Tanım 3.1.1. Π , \mathbb{R}^3 de bir düzlem olmak üzere \mathbb{R}^3 de düzlemsel bir eğri $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Pi \subset \mathbb{R}^3$ ve ℓ de γ eğrisini kesmeyen bir doğru olsun. γ eğrisinin ℓ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey denir. Oluşan bu dönel yüzeyin dönel yüzey eksenini ℓ , üreteç eğrisi de γ eğrisi olarak adlandırılır. Bir başka ifadeyle, düzlem de alınan bir eğrinin, eğriyi kesmeyen bir doğru (dönme eksenini) etrafında kaymadan dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey denir (Ikawa, 2000: 173-180).

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Dönel Yüzeyler

Doğrultman vektörleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ve $(0,0,1)$ şeklinde olan ve $0x$, $0y$ ve $0z$ doğrularını invariant bırakan ortogonal dönme matrisleri,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \cos v & 0 & -\sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin v & 0 & \cos v \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup ters hareket için ortogonal dönme matrisleri, sırasıyla,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca burada $A_i A_i^T = I_3$ ve $\det A_i = +1$ ($i=1,2,3,4,5,6$) dir.

3-boyutlu Öklid uzayında, ℓ dönme eksenini $(1,0,0)$ yani $0x$, dönme düzlemi $z=0$ ve $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı üzerinde f ve g fonksiyonları C^2 sınıfından olmak üzere, üreteç eğrisi $\gamma(u) = (g(u), f(u), 0)$ olsun. Buradan elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \end{pmatrix}$$

ve $r(u, v) = (g(u), f(u) \cos v, f(u) \sin v)$ dir. $y=0$ olarak alınan dönme düzleminde ise, üreteç eğrisinin parametrik ifadesi $\gamma(u) = (g(u), 0, f(u))$ şeklinde olsun. Burada elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ 0 \\ f(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \sin v \\ f(u) \cos v \end{pmatrix}$$

ve $r(u, v) = (g(u), f(u) \sin v, f(u) \cos v)$ dir. Yukarıda verilen ifadelere benzer şekilde, ℓ dönme ekseninin $0y$ yani $(0,1,0)$ olması halinde, dönme düzlemi $z=0$ olmak üzere üreteç eğrisinin parametrik ifadesi $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$ şeklinde olup, dönel yüzeyin parametrizasyonu ise;

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, g(u), f(u) \sin v)$$

dir. Yine dönme düzlemi $x=0$ alındığında, üreteç eğrisinin parametrik ifadesi $\gamma(u) = (0, g(u), f(u))$ şeklinde olup, dönel yüzeyin parametrizasyonu ise;

$$r(u, v) = (-f(u) \sin v, g(u), f(u) \cos v)$$

dir. Son olarak, ℓ dönme eksenini $0z$ yani $(0,0,1)$ alındığında, dönme düzlemi $y=0$ olarak alındığında, üreteç eğrisinin parametrik ifadesi $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ şeklinde olup, dönel yüzeyin parametrizasyonu ise

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

şeklinde elde edilir. Dönme düzlemi $x=0$ olduğunda, üreteç eğrisinin parametrik ifadesi $\gamma(u) = (0, f(u), g(u))$ şeklinde olup, dönel yüzeyin parametrizasyonu ise

$$r(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u))$$

dir. Burada, $0 \leq v \leq 2\pi$ şeklindedir (Ikawa, 2000: 173-180).

3.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Dönel Yüzeyler

3-boyutlu Minkowski uzayında dönel yüzeyler Öklid uzayı ile kıyaslandığında oldukça zengin özelliklere sahiptirler. Diğer uzaylarda verilen tüm dönel yüzey tanımları Minkowski uzayında da geçerlidir ve ayrıca son zamanlarda bu yüzeyler üzerinde yapılan çalışmalar önemli oranda artmıştır. Yapı ve özellikleri bakımından yüzeyler farklılıklar gösterirler bundan dolayı sınıflandırma yapılırken bu farklılıklar göz önünde bulundurulur. Çalışmanın bu kısmında 3-boyutlu Minkowski uzayında farklı eksen tiplerine göre dönel yüzeylere yer verilmiştir.

Eksen tiplerine göre 3 boyutlu Minkowski uzayındaki dönel yüzeyler; spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç kısımda incelenir.

3.2.1. Spacelike Eksenli Dönel Yüzeyler

3-boyutlu Minkowski uzayında doğrultman vektörleri $(1,0,0)$ ve $(0,1,0)$ olan spacelike doğrularını invaryant bırakan semi-ortogonal dönme matrisleri sırasıyla,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} \cosh v & 0 & \sinh v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh v & 0 & \cosh v \end{pmatrix},$$

dir. Burada $S_i^T \varepsilon S_i = \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(1,1,-1)$ ve $\det S_i = +1$ ($i=1,2$) dir. 3-boyutlu Minkowski uzayında doğrultmanı $(1,0,0)$ olan spacelike dönme eksenini ℓ , dönme düzlemi $z=0$ ve $f, g \in C^2(I, \mathbb{R})$ olmak üzere $\gamma(u) = (g(u), f(u), 0)$ üreteç eğrisi spacelikettir. Böylece elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$ olmak üzere sırasıyla,

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \cosh v \\ f(u) \sinh v \end{pmatrix}$$

yani $r(u, v) = (g(u), f(u) \cosh v, f(u) \sinh v)$ dir. Eğer dönme düzleminde $y=0$ olarak belirlenirse, üreteç eğrisi spacelike veya timelike olup, parametrik ifadesi $\gamma(u) = (g(u), 0, f(u))$ olur. Elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$ olmak üzere sırasıyla,

$$r(u, v) = (g(u), f(u) \sinh v, f(u) \cosh v)$$

dir. Son olarak, ℓ dönme eksenini spacelike yani doğrultmanı $(0,1,0)$ vektörü ve dönme düzlemleri sırasıyla $z=0$ ve $x=0$ olarak alınması halinde, üreteç eğrileri sırasıyla, $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$ spacelike eğri ile $\gamma(u) = (0, g(u), f(u))$ spacelike veya timelike eğri olur. Buradan elde edilen dönel yüzeyler $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$ olmak üzere sırasıyla,

$$r(u, v) = (f(u) \cosh v, g(u), f(u) \sinh v),$$

ve

$$r(u, v) = (f(u) \sinh v, g(u), f(u) \cosh v)$$

dir (Ikawa, 2001: 377-394).

3.2.2. Timelike Eksenli Dönel Yüzeyle

3-boyutlu Minkowski uzayında doğrultmanı vektörü $(0,0,1)$ olan timelike doğrularını invaryant bırakan semi-ortogonal dönme matrisi ile ters hareketi oluşturan semi ortogonal dönme matrisi sırasıyla,

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dir. Burada $T_i^T \varepsilon T_i = \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(1,1,-1)$ ve $\det T_i = +1$ ($i=1,2$) dir. 3-boyutlu Minkowski uzayında doğrultmanı $(0,0,1)$ olan timelike dönme eksenli ℓ , dönme düzlemi $y=0$ ve $f, g \in C^2(I, \mathbb{R})$ sınıfından olmak üzere $\gamma(u) = (g(u), 0, f(u))$ üreteç eğrisi timelikedir. Böylece elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$ olmak üzere sırasıyla,

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \\ g(u) \end{pmatrix}$$

yani $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ dir. Eğer dönme düzleminde $x=0$ olarak belirlenirse, üreteç eğrisi spacelike veya timelike olup, parametrik ifadesi olur. Elde edilen $\gamma(u) = (0, f(u), g(u))$ dönel yüzeyin parametrizasyonu $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$r(u, v) = (f(u) \sin v, f(u) \cos v, g(u))$$

dir (Ikawa, 2001: 377-394).

3.2.3. Lightlike Eksenli Dönel Yüzeyle

3-boyutlu Minkowski uzayında doğrultmanı vektörü $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ ve $(1,0,-1)$ olan lightlike doğrularını invaryant bırakan semi-ortogonal dönme matrisi ile ters hareketi oluşturan semi ortogonal dönme matrisi sırasıyla,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -v & v \\ v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v^2}{2} & v & \frac{v^2}{2} \\ -v & 1 & v \\ -\frac{v^2}{2} & v & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix},$$

ve

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -v & -v \\ v & 1 - \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} \\ -v & \frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix}, L_4 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v^2}{2} & v & -\frac{v^2}{2} \\ -v & 1 & -v \\ -\frac{v^2}{2} & -v & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix},$$

dir. Burada $L_i^T \varepsilon L_i = \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(1, 1, -1)$ ve $\det L_i = +1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) dir. 3-boyutlu Minkowski uzayında doğrultmanı $(0, 1, 1)$ olan lightlike dönme eksenini ℓ , dönme düzlemi $x = 0$ ve $f, g \in C^2(I, \mathbb{R})$ olup $f(u) = \varphi(u) + u$, $g(u) = \varphi(u) - u$ olmak üzere üreteç eğrisi spacelike yada timelike olup parametrik ifadesi $\gamma(u) = (0, \varphi(u) + v, \varphi(u) - u)$ olur. Böylece elde edilen döneel yüzeyin parametrizasyonu $\forall v \in \mathbb{R}, 0 \leq u \leq 2\pi$ olmak üzere sırasıyla,

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -v & v \\ v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi + u \\ \varphi - u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2uv \\ \varphi + u - uv^2 \\ \varphi - u - uv^2 \end{pmatrix}$$

ve $r(u, v) = (-2uv, \varphi + u - uv^2, \varphi - u + uv^2)$ dir. Dönme eksenini lightlike yani doğrultmanı $(0, 1, -1)$ vektörü, dönme düzleminde $x = 0$ olarak alındığında elde edilen döneel yüzey,

$$r(u, v) = (-2v\varphi, \varphi + u - v^2\varphi, \varphi - u + v^2\varphi)$$

dir. Benzer olarak, dönme eksenini lightlike yani doğrultmanı sırasıyla $(1, 0, 1)$ ve $(1, 0, -1)$ vektörler, dönme düzlemi $y = 0$ olarak alındığında, üreteç eğrisi spacelike veya timelike olup parametrik ifadesi, $\gamma(u) = (\varphi(u) + u, 0, \varphi(u) - u)$ dur. Buradan elde edilen döneel yüzeylerin parametrik ifadeleri,

$$r(u, v) = (\varphi + u - uv^2, -2uv, \varphi - u - uv^2)$$

ve

$$r(u, v) = (\varphi + u - v^2\varphi, -2v\varphi, \varphi - u + v^2\varphi)$$

dir. Elde edilen bu döneel yüzeylerdeki üreteç eğrileri için,

$$\langle \gamma_1', \gamma_1' \rangle = \langle \gamma_2', \gamma_2' \rangle = 4\varphi'$$

olur. $\varphi' \neq 0$ olsun. Bu durumda,

i. $\varphi' > 0 \Rightarrow \gamma_1$ ve γ_2 spacelike üreteç olup (L, S) - tipi durumu oluşur.

ii. $\varphi' < 0 \Rightarrow \gamma_1$ ve γ_2 timelike üreteç olup (L, T) - tipi durumu oluşur.

Burada, (L, S) -tipi'nin anlamı; yüzey, lightlike eksenli ve spacelike üreteç eğrili demektir

(Ikawa, 2001: 377-394).

3.3. Yoğunluklu Yüzeyler

Fiziksel yoğunlukları farklı olan yüzeyler ya da bölgeler dikkate alındığında; fizikte yoğunluklu manifoldlar ortaya çıkar. Yoğunluğu olan iki boyutlu yüzey örneği olarak Gauss düzlemi verilebilir. Gauss düzlemi, r orijinden alınan uzaklık olmak üzere; $(2\pi)^{-1} e^{-r^2/2}$ tarafından ağırlıklandırılan hacim ve uzunluklu Öklid düzlemidir. Hacim, çevre ve alan için kullanılan e^ϕ pozitif yoğunluklu bir diferansiyellenebilir manifold için Riemann hacmi dV , çevre uzunluğu dP ve alan dA olmak üzere, yoğunluklu hacim, çevre uzunluğu ve alan, sırasıyla;

$$dV_\phi = e^\phi .dV$$

$$dP_\phi = e^\phi .dP$$

$$dA_\phi = e^\phi .dA$$

biçimindedir (Corwin, 2006: 1-15).

Bir eğrinin eğriliğini veya bir yüzeyin ortalama eğriliğini, yoğunluğu olan manifoldlara genelleyebiliriz. Genellemeler, manifoldların standart eğrilik kavramına uyacak biçimde tanımlanmıştır (Corwin, 2006: 1-15).

Olasılık ve istatistik alanında sıkça görülen $e^{-\pi|x|^2}$ Gauss yoğunluklu Öklid uzayı, yoğunluklu manifoldun ilk örneklerinden biridir. Bu tür manifoldlar için farklı örnekler aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 3.3.1. Kapalı Öklid yarı düzlemi üzerinde (x ekseninde sınırlı) sınırlı bir eğri ile bu eğrinin x ekseninde etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyi göz önüne alalım. Böylece yüzey üzerindeki alanlar ve yay uzunlukları, $2\pi y$ ağırlığına sahip yarı düzlem üzerindeki alan ve yay uzunluklarına karşılık gelir (Corwin, 2006: 1-15).

Örnek 3.3.2. Fizikte, bir nesne farklı iç yoğunluklara sahip olabilir. Böylece nesnenin kütlesini belirlemek için, yoğunluklu ağırlaştırılmış hacmi integre etmek gerekir (Corwin, 2006: 1-15).

Tanım 3.3.1. 2-boyutlu yoğunluklu Riemann manifoldu için N birim normal vektörü, κ Riemann eğriliği olmak üzere, κ_ϕ yoğunluklu Riemann eğriliği,

$$\kappa_\phi = \kappa - \frac{d\phi}{dN}$$

biçimindedir (Corwin, 2006: 1-15).

ϕ eğriliğinin formülünden $\frac{d\phi}{dN}$ nin minimal yüzeyler için geometrik yorumu aşağıda verilmiştir.

Gauss uzayında $\frac{d\phi}{dN}$, yüzey üzerindeki bir noktanın tanjant hiperdüzlemine orijinden olan uzaklığıdır. G^3 Gauss uzayında;

a. Düzlemler sabit ortalama eğriliğine sahiptir ve orijin boyunca geçen düzlem minimaldir.

b. Orijindeki küreler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve $\frac{1}{\sqrt{2}}$ yarıçaplı olan küreler minimaldir.

c. Eksenleri orijinden geçen dairesel silindir sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve 1 yarıçaplı olan dairesel silindir minimaldir (Hieu, 2009: 277-285).

Tanım 3.3.2. e^ϕ yoğunluklu n -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde, H Riemann ortalama eğriliği, N birim normal vektör olmak üzere, bir hiperyüzeyin H_ϕ yoğunluklu ortalama eğriliği;

$$H_\phi = H - \frac{1}{n-1} \frac{d\phi}{dN}$$

şeklindedir (Hieu, 2009: 277-285).

Ayrıca e^ϕ yoğunluklu E^3 Öklid uzayında bir yüzeyin ortalama eğriliği;

$$H_\phi = H - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dN}$$

biçimindedir (Hieu, 2009: 277-285).

Burada, H ortalama eğrilik ve N yüzeyin normal vektör alanıdır. H_ϕ ortalama eğriliğine, ϕ ortalama eğriliği yada ağırlıklı ortalama eğrilik denir (Corwin, 2006: 1-15).

Tanım 3.3.3. e^ϕ yoğunluklu n -boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde K , Gauss eğriliği olmak üzere, K_ϕ ağırlıklı Gauss eğriliği,

$$K_\phi = K - \Delta\phi$$

şeklindedir (Corwin, 2006: 1-15).

4. 3-BOYUTLU MINKOWSKİ UZAYINDA YOĞUNLUKLU DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE

Bu bölümde $e^{-y^2-z^2}$ yoğunluklu 3-boyutlu Minkowski uzayında lightlike dönme eksenli dönel yüzeyin ağırlıklı ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği hesaplanacaktır. Ağırlıklı Gauss eğriliği yardımı ile bir dönel yüzey inşa edilip elde edilen yüzeyle ilgili grafikler çizilecektir.

$\gamma(u) = (0, u, g(u))$, C^2 sınıftan xy -düzleminde yatan bir eğri olsun, burada $u \in I$ ve $I \subset \mathbb{R} - \{0\}$ dir. $\gamma(u)$ eğrisi lightlike eksen etrafında döndürüldüğünde M dönel yüzeyi

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -v & v \\ v & 1 - \frac{v^2}{2} & \frac{v^2}{2} \\ v & -\frac{v^2}{2} & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ g(u) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde elde edilir. Yüzeyin parametrik denklemi ise

$$r(u, v) = \left((g(u) - u)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}g(u), -\frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g(u) \right) \quad (4.2)$$

şeklindedir. Burada

$$r_u = \left(-v + vg'(u), \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g'(u) \right)$$

$$r_v = (-u + g(u), -vu + vg(u), -vu + vg(u))$$

şeklindedir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayılar E , F ve G olmak üzere;

$$E = \langle r_u, r_u \rangle$$

$$= \left\langle \left(-v + vg'(u), \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g'(u) \right), \right. \\ \left. \left(-v + vg'(u), \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) + \frac{v^2}{2}g'(u), -\frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g'(u) \right) \right\rangle$$

$$= v^2 - v^2 \cdot g'(u) - v^2 \cdot g'(u) + v^2 g'^2(u) + 1 - v^2 + \frac{v^4}{4} + \frac{v^2}{2}g'(u) - \frac{v^4}{4}g'(u) + \frac{v^2}{2}g'(u) - \frac{v^4}{4}g'(u) + \frac{v^4}{4}g'^2(u) \\ - \left(\frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2}g'(u) - \frac{v^4}{4}g'(u) - \frac{v^2}{2}g'(u) + g'^2(u) + \frac{v^2}{2}g'^2(u) - \frac{v^4}{4}g'(u) + \frac{v^2}{2}g'^2(u) + \frac{v^4}{4}g'^2(u) \right) \\ = 1 - g'^2(u)$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle r_u, r_v \rangle \\
&= \left\langle \left(-v + v g'(u), \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) + \frac{v^2}{2} g'(u), -\frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) g'(u) \right), \right. \\
&\quad \left. \left(-u + g(u), -vu + v g(u) - vu + v g(u) \right) \right\rangle \\
&= uv - v g(u) - uv g'(u) + g(u) g'(u) - vu + v g(u) + \frac{v^3}{2} u - \frac{v^3}{2} g(u) - \frac{v^3}{2} u g'(u) + \frac{v^3}{2} g(u) g'(u) \\
&\quad - \left(\frac{v^3}{2} u - \frac{v^3}{2} g(u) - v u g'(u) + v g'(u) g(u) - \frac{v^3}{2} u g'(u) + \frac{v^3}{2} g'(u) g(u) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle r_v, r_v \rangle \\
&= \langle \left(-u + g(u), -vu + v g(u) - vu + v g(u) \right), \left(-u + g(u), -vu + v g(u) - vu + v g(u) \right) \rangle \\
&= u^2 - 2u g(u) + g^2(u) + v^2 u^2 - 2v^2 u g(u) + v^2 g^2(u) - \left(v^2 u^2 - 2v^2 u g(u) + v^2 g^2(u) \right) \\
&= \left(u - g(u) \right)^2
\end{aligned}$$

dir.

Yüzeyin birim normali

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
r_u \times r_v &= \left(v(u - g(u))(-1 + g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-v^2 + (-2 + v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-2 - v^2 + v^2 g'(u)) \right) \\
\|r_u \times r_v\| &= \left\langle \left(v(u - g(u))(-1 + g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-v^2 + (-2 + v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-2 - v^2 + v^2 g'(u)) \right), \right. \\
&\quad \left. \left(v(u - g(u))(-1 + g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-v^2 + (-2 + v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-2 - v^2 + v^2 g'(u)) \right) \right\rangle \\
&= \sqrt{(u - g(u))^2 (-1 + g'(u))^2} \\
N &= \frac{\left(v(u - g(u))(-1 + g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-v^2 + (-2 + v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u - g(u))(-2 - v^2 + v^2 g'(u)) \right)}{\sqrt{(u - g(u))^2 (-1 + g'(u))^2}}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları e , f , g olmak üzere;

$$r_{uu} = \left(v g''(u), \frac{1}{2} v^2 g''(u), \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) g''(u) \right)$$

$$r_w = (-1 + g'(u), -v + vg'(u), -v + vg'(u))$$

$$r_v = (0, -u + g(u), -u + g(u))$$

ve

$$N = \frac{\left(v((u-g(u))(-1+g'(u))), \frac{1}{2}(u-g(u))(-v^2+(-2+v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u-g(u))(-2-v^2+v^2g'(u)) \right)}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u))^2}}$$

olmak üzere

$$e = \langle N, r_{uu} \rangle$$

$$e = \left\langle \frac{\left(v((u-g(u))(-1+g'(u))), \frac{1}{2}(u-g(u))(-v^2+(-2+v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u-g(u))(-2-v^2+v^2g'(u)) \right)}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u))^2}}, \right. \\ \left. \left(vg''(u), \frac{1}{2}v^2g''(u), \left(1+\frac{v^2}{2}\right)g''(u) \right) \right\rangle \\ = \frac{g''(u)(u-g(u))}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u))^2}}$$

$$f = \langle N, r_{uv} \rangle$$

$$f = \left\langle \frac{\left(v((u-g(u))(-1+g'(u))), \frac{1}{2}(u-g(u))(-v^2+(-2+v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u-g(u))(-2-v^2+v^2g'(u)) \right)}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u))^2}}, \right. \\ \left. ((-1+g'(u), -v+vg'(u), -v+vg'(u))) \right\rangle \\ = 0$$

$$g = \langle N, r_{vv} \rangle$$

$$g = \left\langle \frac{\left(v((u-g(u))(-1+g'(u))), \frac{1}{2}(u-g(u))(-v^2+(-2+v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u-g(u))(-2-v^2+v^2g'(u)) \right)}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u))^2}}, \right. \\ \left. (0, -u+g(u), -u+g(u)) \right\rangle \\ = \frac{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u))^2}}{1+g'(u)}$$

dir.

Yüzeyin ortalama eğriliği H ve K Gauss eğriliği olmak üzere;

$$H = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$$

ve

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

formüllerini yardımıyla

$$H = \frac{\left(\frac{(u-g(u))g''(u)}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)}}(u-g(u))^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + \left(\frac{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)}}{1+g'(u)} \right) (1-g'(u)^2) \right)}{2\left((1-g'(u)^2)(u-g(u)^2) - 0^2\right)}$$

$$= \frac{(u-g(u)^2)(-1+g'(u))^2(1+g'(u)) + (-u+g(u))g''(u)}{2\left((u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)\right)^{3/2}}$$

ve

$$K = \frac{\left(\frac{(u-g(u))g''(u)}{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)}} \right) \left(\frac{\sqrt{(u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)}}{1+g'(u)} \right) - 0^2}{(1-g'(u)^2)(u-g(u))^2 - 0^2}$$

$$K = -\frac{g''(u)}{(u-g(u))(1+g'(u))(1-g'(u)^2)}$$

şeklinde elde edilir.

Yüzeyin ortalama eğriliği H , Gauss eğriliği K ve birim normali N sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H = \frac{(u-g(u)^2)(-1+g'(u))^2(1+g'(u)) + (-u+g(u))g''(u)}{2\left((u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)\right)^{3/2}}$$

$$K = -\frac{g''(u)}{(u-g(u))(1+g'(u))(1-g'(u)^2)}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{w}} \left(v((u-g(u))(-1+g'(u))), \frac{1}{2}(u-g(u))(-v^2+(-2+v^2)g'(u)), \frac{1}{2}(u-g(u))(-2-v^2+v^2g'(u)) \right)$$

Burada $(u-g(u))^2(-1+g'(u)^2) > 0$ ve $w = (u-g(u))^2(-1+g'(u)^2)$ dir. Kabul edelim ki

M $e^{-y^2-z^2}$ yoğunluklu 3 boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey olsun. Yoğunluklu fonksiyonu göz önünde bulundurulursa M yüzeyinin ağırlıklı ortalama eğriliği H_φ ve ağırlıklı Gauss eğriliği K_φ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H_\varphi = \frac{1}{2w^{3/2}} \left((u-g(u))^2((-1+g'(u))^2(1+g'(u))) + 2(u-g(u))(-1+g'(u)^2) \right) \quad (4.3)$$

$$\left(((1+v^2)g(u)+v^2(u-g(u))g'(u)-u(v^2+g'(u)))+(-u+g(u))g''(u) \right)$$

$$K_\varphi = 4 - \frac{g''(u)}{(u-g(u))(-1+g'(u))(1+g'(u))^2} \quad (4.4)$$

Teorem: $e^{-y^2-z^2}$ yoğunluklu \mathbb{R}_1^3 uzayında $\gamma(u) = (0, u, g(u))$ profil eğrili dönel yüzey

$$r(u, v) = \left((g(u)-u)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}g(u), \frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g(u) \right) \text{ ve } K_\varphi(u) \text{ ağırlıklı Gauss}$$

eğrilik olsun. h belirli ise (4.4) diferansiyel denkleminin bazı özel çözümleri yardımıyla lightlike eksenli dönel yüzey elde edilir.

Önerme: (4.4) denklemini ele alalım. (4.4) de $g(u)$ yerine $h(u)+u$ yazılırsa

$$K_\varphi = \frac{4hh'(2+h')^2 + h''}{hh'(2+h')^2} \quad (3.1)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem ikinci dereceden non-lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin analitik çözümünün elde edilmesi zordur. Bu yüzden özel fonksiyonlar yardımıyla yaklaşıma çalışacağız.

Birinci durum:

Kabul edelim ki $K_\varphi(u) = 0$ olsun, bu durumda (3.1) denkleminde

$$4hh'(2+h')^2 + h'' = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.2) denkleminin çözümü

$$\frac{h}{2} + \frac{c_1}{8} \ln \left| \frac{1+2c_1h}{1-2c_1h} \right| + u + c_2 = 0, \quad |2c_1h| < 0 \text{ ve } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dir. $h(u)$ yerine $g(u)-u$ yazarsak

$$\frac{g(u)-u}{2} + \frac{c_1}{8} \ln \left| \frac{1+2c_1(g(u)-u)}{1-2c_1(g(u)-u)} \right| + v + c_2 = 0$$

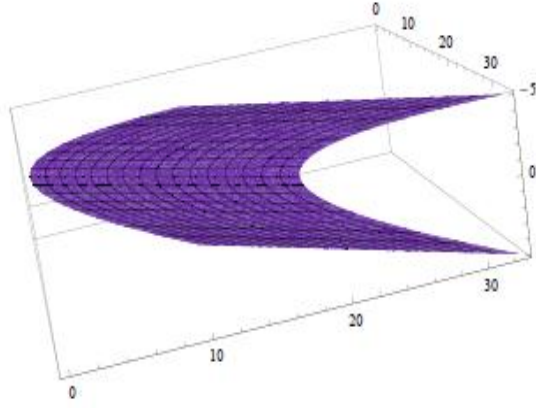
elde edilir. Eğer $c_1 = 0$ alırsak $g(u) = 2c_2 - u$ şeklinde elde edilir. Böylece yüzey parametrik denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r(u, v) = \left((2c_2 - u)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}(2c_2 - u), \frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)(2c_2 - u) \right)$$

Ayrıca

$$\begin{cases} 0 < u < 20 \\ -5 < v < 5 \end{cases}$$

için yüzeyin grafiği;



Şekil 1. K_φ Değişkenine Bağlı Yüzey Grafiği

şeklinde elde edilir.

İkinci durum:

Kabul edelim ki $K_\varphi(u) = 4$ olsun. Bu durumda $g(u) = (c_1 + 1)u + c_2$ olarak elde edilir.

Yüzeyin parametrik denklemini

$$r(u, v) = \left((c_1 u + c_2 - u)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}(c_1 u + c_2), \frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)(c_1 u + c_2) \right)$$

şeklinde elde edilir.

$$K_\varphi = 4 - \frac{g''(u)}{(u - c_1 u^2 - c_2 u - c_3)(-1 + 2c_1 u + c_2)(1 + 2c_1 u + c_2)^2}$$

olarak alınırsa $g(u) = c_1 u^2 + (c_2 + 1)u + c_3$; $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ şeklinde elde edilir.

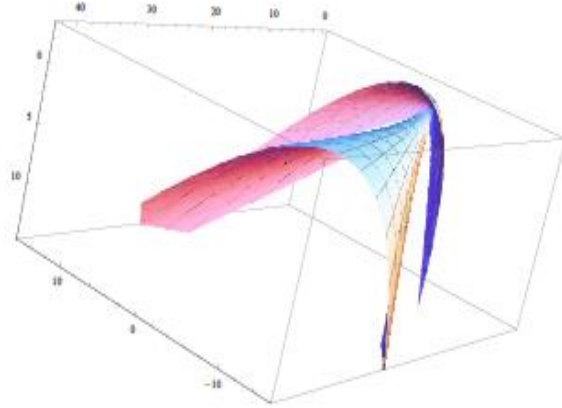
Buradan yüzeyin parametrik denklemini

$$r(u, v) = \left((c_1 u^2 + (c_2 - 1)u + c_3 - u)v, \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)u + \frac{v^2}{2}g(u), \frac{v^2}{2}u + \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)g(u) \right)$$

biçiminde elde edilir. $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ ve

$$\begin{cases} -3 < u < 3 \\ -2 < v < 2 \end{cases}$$

için yüzeyin grafiği



Şekil 2. K_φ Değişkenine Bağlı Yüzey Grafiği

şeklinde elde edilir.

KAYNAKÇA

- Bar, C.** (2010). Elementary Differential Geomerty. *Cambridge University Press, New York*, 1-365.
- Beem, J. K. & Ehrlich, P. E.** (1981). Global Lorentzian geometry. *Marcel Dekker Inc, New York*, 24-52.
- Belarbi, L. & Belkhef, M.** (2012). Surfaces in \mathbb{R}^3 with density, i-manager's. *Journal on Mathematics*, Vol. 1, No. 1, 34-48.
- Beneki, C. C., Kaimakamis, G. & Papantoniou, B. J.** (2002). Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 275(2), 586-614.
- Corwin, I., Hoffman, N., Hunder, S., Sesum, V. & Xu, Y.** (2006). Differential geometry of manifolds with density. *Rose-Hulman Undergrad, Mathematical Journal*, 7, 1-15.
- Delaunay, C. H.** (1841). Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 309-314.
- Hacısalihođlu, H. H.** (2000). Diferensiyel Geometri I. *Ankara Üniversitesi, Ankara*, 1-270.
- O'Neill, B.** (2006). Elementary Differential Geometry. *Department of Mathematics, University of California, Los Angeles*, 1-518.
- Hacısalihođlu, H. H.** (2006). Analitik Geometri. *Ankara Üniversitesi, Ankara*, 1-485.
- Hieu, D. T. & Hoang, N. M.** (2009). Ruled minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with density e^z . *Pacific Journal of Mathematics*, 243(2), 277-285.
- Hsiang, W. & Wenci, W. Yu.** (1981). A generalization of a theorem of Delaunay. *Journal Differential Geometry*, 16, 161-177.
- Ikawa, T.** (2000). Bour's theorem and Gauss map. *Yokohama Mathematical Journal*, 48: 173-180.
- Ikawa, T.** (2001). Bours's theorem in Minkowski geometry. *Tokyo Mathematical Journal*, 24: 377-394.
- Kenmotsu, K.** (1980). Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 32(1), 147-153.
- Morgan, F.** (2005). Manifolds with density. *Notices of the AMS*, 853-858.
- Morgan, F.** (2006). Myers theorem with density. *Kodai Mathematical Journal*, 29(3), 455-461.
- O'Neill, B.** (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, *Academic Press, New York*, 1-468.

- Rosales, C., Canete, A., Bayle, V. & Morgan, M.** (2008). On the isoperimetric problem in Euclidean space with density. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 31(1), 27-46.
- Sabuncuoğlu, A.** (2014). Diferensiyel Geometri V. *Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara*, 1-514.
- Turgut, A.** (1995). 3 boyutlu Minkowski uzayında Spacelike ve Timelike regle yüzeyle. *Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 2-18.
- Yıldız, Ö. G., Hızal, S. & Akyiđit, M.** (2018). Type I^+ Helicoidal surfaces with prescribed weighted mean or Gaussian curvature in Minkowski space with density. *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta-Seria Matematica* 26(3), 1-11.