T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA LAPLACE-BESSEL OPERATÖRE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP TERCAN

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ESRA KAYA

BİLECİK, 2026
10626046

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA LAPLACE-BESSEL OPERATÖRE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP TERCAN

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. ESRA KAYA

BİLECİK, 2026
10626046

BEYAN

"**Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarda Laplace-Bessel Operatöre Bağlı Maksimal Operatörlerin Komütatörleri**" adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="2">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td>Desteğin Türü</td><td>Proje Numarası</td></tr>
<tr><td>1-BAP(Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2-TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td>Diğer;.............................. ....</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td>ETİK KURUL karar / sayı:</td><td>..................
........./......</td></tr>
</table>

Zeypep TERCAN
. . . / 01 / 2026
İmza

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında bilgi ve tecrübeleriyle bana her zaman yol gösteren, sabrı, desteği ve güler yüzüyle yanımda olan değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Esra Kaya'ya içtenlikle teşekkür ederim. Çalışmama sağladıkları destekler ve sundukları değerli katkılar dolayısıyla Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Tuğba Yurdakadim'e ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Emre Taş'a teşekkürlerimi sunarım. Bununla birlikte, bu süreç boyunca bana güç veren, anlayışları ve dualarıyla her zaman yanımda olan aileme en derin teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep TERCAN

2026

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA LAPLACE-BESSEL OPERATÖRE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiş, Lebesgue ve değişken üslü Lebesgue uzayları takdim edilmiştir. Ayrıca bu bölümde, genelleştirilmiş öteleme operatörü takdim edilerek B-maksimal operatörler ve bu operatörlerin komütatörleri hatırlatılmıştır. Üçüncü bölüm tezin orijinal sonuçlarını içeren bölüm olup B-maksimal operatörünün komütatörünün, B-maksimal komütatörün ve sharp B-maksimal operatörün komütatörünün değişken üslü Lebesgue uzaylarda sınırlılığı ispatlanmıştır. Son bölümde, elde edilen özgün bulgular değerlendirilmiş ve çalışmanın literatüre olan katkısı belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: BMO uzayı, değişken üslü Lebesgue uzayı, komütatör, maksimal operatör.

ABSTRACT

COMMUTATORS OF MAXIMAL OPERATORS ASSOCIATED WITH LAPLACE-BESSEL OPERATOR ON VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACES

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter presents the fundamental definitions and theorems that we would need in our study, and introduces Lebesgue spaces and variable exponent Lebesgue spaces. In addition, this chapter addresses the generalized translation operator and recalls a review of B-maximal operators and their commutators. The third chapter contains the original results of the thesis, in which the boundedness of the commutator of B-maximal operator, the B-maximal commutator, and the commutator of sharp B-maximal operator on variable exponent Lebesgue spaces is proved. The final chapter evaluates the obtained original findings and outlines the contribution of the study to the literature.

Keywords: BMO space, commutator, maximal operator, variable exponent Lebesgue space.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{R}^n_{k,+}$	:	n boyutlu Öklid üst yarı uzay
$\mathscr{D}(x,r)$	:	x merkezli r yarıçaplı üst yarı yuvar
$\mathscr{D}(0,r)$	:	Orijin merkezli r yarıçaplı üst yarı yuvar
$\mathrm{diam}(\mathscr{D})$	:	$\mathscr{D}$ yuvarının çapı
$\mathscr{S}_+$	:	Schwartz uzayı
$\mathscr{S}'_+$	:	Schwartz uzayının duali
$\mathscr{C}(\mathbb{R}^n_+)$	:	$\mathbb{R}^n_+$ da sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$	:	$\mathbb{R}^n_+$ da kompakt destekli fonksiyonlar uzayı
$L_p(\mathbb{R}^n)$	:	Lebesgue uzayı
$L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$	:	Laplace-Bessel operatörüne bağlı Lebesgue uzayı
$L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$	:	Laplace-Bessel operatörüne bağlı ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$	:	Değişken üslü Lebesgue uzayı
$L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$	:	Laplace-Bessel operatörüne bağlı değişken üslü Lebesgue uzayı
$L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$	:	Laplace-Bessel operatörüne bağlı değişken üslü Lebesgue uzayının dual uzayı
$p(\cdot)$	:	Değişken üs fonksiyonu
$p'(\cdot)$	:	Değişken üs fonksiyonunun eşleniği
p_+	:	Değişken üs fonksiyonunun esas supremumu
p_-	:	Değişken üs fonksiyonunun esas infimumu
$\mathscr{P}(\mathbb{R}^n_+)$	:	Değişken üs fonksiyonlarının kümesi
$\mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_+)$	:	Lokal log-Hölder sürekli olan üs fonksiyonlarının kümesi
$\mathscr{P}^{\log}_\infty(\mathbb{R}^n_+)$	:	Sonsuzda log-Hölder sürekli olan üs fonksiyonlarının kümesi
$\rho_{p(\cdot),\gamma}$	:	Laplace-Bessel operatörüne bağlı modüler fonksiyon
ess sup	:	Esas supremum
ess inf	:	Esas infimum
T^y	:	Genelleştirilmiş öteleme operatörü
M_γ	:	B-maksimal operatör
$M^\sharp_\gamma$	:	Sharp B-maksimal operatör
$[M_\gamma, b]$	:	B-maksimal operatörün komütatörü
$M_{b,\gamma}$	:	B-maksimal komütatör
$[M^\sharp_\gamma, b]$	:	Sharp B-maksimal operatörün komütatörü

1. GİRİŞ

Değişken üslü fonksiyon uzaylarının ortaya çıkışı, klasik Lebesgue uzayları L_p ve Sobolev uzaylarının $W_{k,p}$ genelleştirilmesi düşüncesinden türetilmiştir. Bu yaklaşımın tarihsel temelleri 1931 yılında Orlicz tarafından tanıtılan Orlicz uzaylarına dayanmaktadır. Orlicz uzayları, sabit bir üs yerine daha genel bir Young fonksiyonu ile tanımlanarak, norm kavramının genelleştirilmesini sağlamıştır (Orlicz, 1931). Değişken üslü fonksiyon uzayları, bir ölçü uzayı üzerinde tanımlanan ve integrasyon mertebesi noktadan noktaya değişen fonksiyonları kapsayan uzaylardır. Bu uzaylarda üs fonksiyonu genellikle $p : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ şeklindedir. Buna göre, fonksiyonun değişken üslü $L_{p(\cdot)}$ sınıfına ait olması şartı klasik L_p tanımının değişken üslü versiyonu olarak yazılır:

$$\rho_{p(\cdot)} = \int_{\Omega} |f(\cdot)|^{p(\cdot)} d\mu(\Omega) < \infty.$$

Değişken üslü fonksiyon uzayları, klasik Lebesgue uzaylarının birçok temel özelliğini korurken, üssün noktadan noktaya değişmesine olanak tanır. Bu özellik, sabit integrasyon mertebesi varsayımının geçerli olmadığı fiziksel, biyolojik ve mühendislik sistemlerinde bu uzayları özellikle uygun bir araç haline getirir. Ayrıca, klasik operatörlerin incelenmesinde yeni analitik zorluklar karşımıza çıkmakta olup değişken üslü uzaylar, hem teorik hem de uygulamalı problemlerde daha esnek ve kapsamlı bir çerçeve sunar. Böylece, lokal değişkenlik özelliğinin önemli olduğu ortamlarda fonksiyonların davranışını doğru şekilde modellemek mümkün olur.

Değişken üslü fonksiyon uzayları özellikle 1990 lı yıllardan itibaren yoğun ilgi görmüştür. Bu bağlamda, Zhikov (1987, 1997) değişken üslü uzayların, mikroskobik heterojenlikleri olan ortamların makroskopik davranışlarını inceleyen karışım teorisi ve eliptik operatörlerdeki uygulamalarını ortaya koymuştur. Diening, Harjulehto, Hästö ve Ružička ise "Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents" adlı eserlerinde konuyu sistematik biçimde ele almıştır (Diening vd., 2011). Fan ve Zhao (Fan ve Zhao, 2001) değişken üslü Sobolev uzaylarının temel özelliklerini incelemiş, Ružička (Ružička, 2000) ise "Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory" adlı çalışmasında bu uzayların uygulama yönlerini vurgulamıştır. Değişken üslü fonksiyon uzaylarının başlıca uygulama alanları arasında, değişken ortam koşullarına sahip eliptik ve parabolik kısmi diferensiyel denklemler, elektroreolojik ve manyetoreolojik akışkanların modellenmesi, görüntü işleme alanında, farklı bölgelerde gürültüyü azaltırken kenarları korumayı sağlayan adaptif filtreleme yöntemleri, mekanik özellikleri konuma göre değişen malzemelerin analizi ile harmonik analiz kapsamında maksimal operatörlerin sınırlılığı ve interpolasyon teorisi yer almaktadır. Dolayısıyla, değişken üslü fonksiyon uzayları; analiz, PDE teorisi, harmonik analiz ve matematiksel modelleme açısından zengin bir alan oluşturmaktadır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları, klasik L_p uzaylarının kavramsal olarak doğal bir genellemesini oluşturmaktadır. Bu uzaylar ilk olarak Orlicz ve Nakano tarafından kavramsal temelleriyle tanımlanmış olup Zhikov'dan sonra PDE lerdeki uygulamalarıyla matematiksel olarak geliştirilmiştir (Orlicz, 1931), (Nakano, 1950), (Zhikov, 1987). $L_{p(x)}(\Omega)$ uzayı,

$$L_{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \text{ ölçülebilir} : \rho_{p(\cdot)} = \int_{\Omega} |f(\cdot)|^{p(\cdot)} d\mu(\Omega) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda norm, genellikle Luxemburg normu olarak adlandırılan

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

ile tanımlanır. Özel olarak, $p(x) = p$ sabit olduğunda klasik L_p uzaylarına indirgenir.

Zhikov (1987), $p(x)$-Laplasyen operatörleriyle ilişkili temel analitik sonuçları geliştirmiştir. Takip eden çalışmalarda, Kováčık ve Rákosník $L_{p(x)}$ ve $W_{1,p(x)}$ uzaylarının temel özelliklerini sistematik biçimde tanımlamış, Diening ise maksimal operatörlerin sınırlılığı, interpolasyon ve Hardy-Littlewood teorilerini değişken üslü uzaylarda genelleştirmiştir (Kováčık ve Rákosník, 1991), (Diening, 2002, 2004, 2005), (Diening vd., 2011). Daha yakın dönemde, Cruz-Uribe ve Fiorenza, "Variable Lebesgue Spaces" adlı kitabında değişken üslü uzaylar için modern ve kapsamlı bir yaklaşım getirmiştir (Cruz-Uribe ve Fiorenza, 2013).

Değişken üslü Lebesgue uzayları, çok çeşitli uygulama alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Değişken katsayılı kısmi diferensiyel denklemlerde, özellikle $p(x)$-Laplasyen tipindeki eliptik ve parabolik denklemlerin analizinde kullanılır. Elektroreolojik akışkanların matematiksel modellemesinde, bu uzaylar viskozitenin elektrik alanına bağlı olduğu durumlarda uygun bir çerçeve sağlar. Görüntü işleme alanında, değişken üslü düzgünleştirme yöntemleri ile gürültü azaltma ve kenar koruma problemlerinde etkin biçimde uygulanır. Fonksiyonel analiz bağlamında, gömme teoremleri, dualite, konvekslik ve operatör teorisi konularında da önemli araçlar sunar. Ayrıca, olasılık ve istatistik alanında, konuma bağlı yoğunluk fonksiyonlarının incelenmesinde $L_{p(\cdot)}$ uzayları kullanılır.

Harmonik analizde önemli rol oynayan operatörler arasında maksimal operatörler ve bu operatörlerin komütatörleri kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Diğer taraftan, klasik Laplace operatöre radyal bir ağırlık ekleyerek genelleştirilen Laplace-Bessel diferensiyel operatörü, radyal fonksiyonların ve ilgili problemlerin analizinde güçlü bir araç olmuştur. Ancak, değişken üslü Lebesgue uzaylarda maksimal operatörle ilişkili komütatörlerin Laplace-Bessel operatörüne bağlı sınırlılık özellikleri nispeten çalışılmamıştır. Bu tezde, bu tür komütatörler için sınırlılık sonuçlarını belirleyerek literatürdeki bu boşluğu doldurmayı ve değişken üslü fonksiyon uzaylarında operatör teorisinin daha geniş bir şekilde anlaşılmasına katkıda bulunmayı amaçlıyoruz.

Komütatör kavramı, harmonik analiz ve operatör teorisinde doğal olarak ortaya çıkar ve genellikle bir çarpma operatörü ile başka bir lineer operatörün neden komütatör olamadığının bir ölçüsü olarak kullanılır. Lokal integrallenebilir bir b fonksiyonu ve bir T lineer operatörü verildiğinde, $[b,T]$ komütatörü

$$[b,T](f)(x) = b(x)T(f)(x) - T(bf)(x),$$

ifadesi ile tanımlanmaktadır, burada $b \in BMO$ dur. Komütatörler, operatörlerin düzgünlük özelliklerini, sınırlılık şartlarını ve fonksiyon uzayları üzerindeki davranışlarını incelemek için güçlü bir yöntem sunar. Özellikle Calderón–Zygmund tipi singüler integrallere bağlı olarak tanımlanan komütatörler, harmonik analiz ve PDE teorisinde önemli bir rol oynar. Harmonik analizde komütatör kavramı, çeşitli uygulamalı alanlarda önemli bir yere sahiptir. Sinyal işleme ve görüntü analizinde maksimal operatörler, filtreleme süreçleri ile kenar tespiti gibi temel işlemlerde etkin biçimde kullanılmaktadır. Veri bilimi ve istatistiksel analiz bağlamında ise Hardy–Littlewood maksimal operatörler, sinyallerin yerel ortalama büyüklüklerini kontrol ederek pürüzsüzleştirme, gürültü azaltma ve aykırı değerlerin belirlenmesi gibi görevlerde güçlü analitik araçlar sunar. Matematiksel fizikte komütatörler, özellikle Heisenberg belirsizlik ilkesi çerçevesinde, kuantum mekaniğinin yapısal temellerinden birini oluşturarak ölçülebilir fiziksel büyüklükler arasındaki etkileşimlerin matematiksel olarak anlaşılmasına katkı sağlar. Komütatörler ilk olarak singüler integral operatörler bağlamında incelenmiş ve daha sonra maksimal operatörlere genişletilmiştir. Klasik maksimal operatörlerin ve bu operatörlerin komütatörlerinin hem klasik hem de değişken üslü fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığına odaklanan önemli sayıda çalışma bulunmaktadır. Özellikle Zhang ve Wu (Zhang ve Wu, 2014), $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayları üzerindeki Hardy-Littlewood maksimal operatörün komütatörleri için sınırlılık kriterlerini belirleyerek, sonraki çalışmalar için temel sonuçlar sunmuştur. Bu sonuçlar, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğünü ve değişken üslü uzaylardaki fonksiyonların özelliklerini incelemek için temel araçlar sağlar.

Hardy-Littlewood maksimal operatörünün komütatörleri üzerine yapılan çalışmalar, lineer olmayan bir operatörün salınım ve düzgünlük özelliklerini çalışmanın bir sonucu olarak, klasik Calderón-Zygmund komütatör kavramından belirgin ölçüde ayrılan bir metodoloji geliştirmiştir. Bu çalışmaların temel çıkış noktalarından biri, maksimal komütatörün BMO uzayı ile bağlantısını gösteren sonuçlardır. Bu yaklaşım daha sonra Banach fonksiyon uzaylarına genişletilmiş ve özellikle Ağcayazı ile Zhang (Ağcayazı ve Zhang, 2023) tarafından yapılan çalışmalar, komütatör sınırlılığının BMO uzayının çeşitli fonksiyonel karakterizasyonlarıyla eşdeğer olduğunu ortaya koymuştur. Lokal maksimal operatörün komütatörü üzerine Liu, Xue ve Yabuta (Liu vd., 2022), Sobolev uzaylarında türevsel düzenliliğin komütatör davranışına etkisini ayrıntılı olarak ortaya koymuştur. İki-ağırlıklı uzayda Bloom tipi iki-ağırlık kriterleri, maksimal operatör komütatörünün ağırlıklı BMO uzayının yapısal özellikleriyle doğrudan ilişkili olduğu gösterilmiş ve böylece komütatör teorisini ağırlıklı uzaylar ile birleştiren hassas karakterizasyon ortaya çıkmıştır (Zhang ve Fan, 2025). Değişken üslü Lebesgue uzaylarda, maksimal komütatörün sınırlılığının sadece BMO uzayının özelliklerine değil, aynı zamanda değişken üslü fonksiyonun log-Hölder sürekliliğine de bağlı olduğu gösterilmiştir (Zhang ve Wu, 2014). Morrey ve Zygmund-Morrey uzaylarında, Ağcayazı, Gogatishvili ve Mustafayev (Ağcayazı vd., 2018) tarafından elde edilen zayıf tip sınırlılık sonuçları ise, komütatörün lokal ve global salınım arasında nasıl köprü kurduğunu gösteren derin eşitsizliklere dayanır. Daha ileri genelleştirmelerde, multilineer kesirli maksimal komütatörler üzerine yapılan çalışmalar komütatör kavramını multilineer operatörlere uyarlayarak BMO uzayının multilineer genelleştirmelerini doğal biçimde ortaya çıkarmıştır (Chen ve Liu, 2022). Tüm bu gelişmeler, maksimal komütatörlerin düzgünlüğünü ölçen bir araç olarak klasik BMO, ağırlıklı BMO, Lipschitz sınıfları, Morrey uzayları, Triebel-Lizorkin, değişken üslü fonksiyon uzayları ve BMO uzayları ile derin bağlantılar kurduğunu, ayrıca iki-ağırlıklı eşitsizlikler, non-doubling ölçüler ve multilineer genişlemeler sayesinde modern harmonik analizde aktif ve giderek genişleyen bir araştırma alanı oluşturduğunu göstermektedir. Bu gelişmelere rağmen, klasik olmayan maksimal operatörlerle, özellikle de spektral teori ile kısmi diferensiyel denklemlerde önemli bir rol oynayan Laplace-Bessel operatörü gibi diferensiyel operatörlerle bağlantılı olan komütatörlere sınırlı ilgi gösterilmiştir. Laplace-Bessel operatör ile ilişkili olan ve B-maksimal operatör olarak adlandırılan maksimal operatörün komütatörü değişken üslü uzaylarda daha az kapsamlı olarak incelenmiştir. Bu çalışmada, B-maksimal operatörünün komütatörü ile birlikte B-maksimal komütatörün ve sharp B-maksimal operatörün komütatörünün de sınırlılığını değişken üslü Lebesgue uzaylarda inceleyerek literatürdeki boşluğu doldurmayı araştırmanın temel amacı olarak konumlandırıyoruz. Sonuçlarımız, klasik komütatör teorisini daha genel bir çerçeveye genişletmekte ve değişken üslü uzaylarda harmonik analiz operatörlerinin davranışına yeni bakış açıları kazandırmaktadır.

2. TEMEL BİLGİLER VE SONUÇLAR

Bu kısımda tez boyunca ihtiyaç duyulacak tanım, kavramlar ve iyi bilinen teoremler hatırlatılacaktır.

2.1. Temel Kavramlar ve Ana Teoremler

Bir Ω kümesi verilsin. Bu kümenin alt kümelerinin bir Σ sınıfı için

i. $\Omega \in \Sigma$,

ii. Her $\mathsf{E} \in \Sigma$ için $\mathsf{E}^{\mathsf{C}} = \Omega \backslash \mathsf{E} \in \Sigma$,

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mathsf{E}_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_n \in \Sigma$

özellikleri sağlanıyorsa Σ ya Ω üzerinde σ-cebirdir denir. (Ω, Σ) ikilisine ölçülebilir uzay denir. Ayrıca, Σ daki her küme ölçülebilir küme olarak adlandırılır. (Ω, Σ) ölçülebilir uzayı ve $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. μ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona Ω üzerinde ölçü denir:

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. Her $\mathsf{E} \in \Sigma$ için $0 \leq \mu(\Sigma) \leq \infty$,

iii. Her ayrık (E_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathsf{E}_n)$.

(Ω, Σ, μ) üçlüsüne ise ölçü uzayı adı verilir. (Ω, Σ) ölçülebilir uzay, φ reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$\varphi^{-1}((\beta, +\infty)) = \{x \in \Omega : \varphi(x) > \beta\} \in \Sigma, \qquad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

ise φ fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.1.1. *$\mathbb{V}$ vektör uzayı verilsin. Her $x, y \in \mathbb{V}$ ve $\eta \in \mathbb{F}$ skaleri için*

i. $\|x\| \geq 0$ *ve* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii. $\|\eta x\| = |\eta| \, \|x\|$,

iii. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlanıyorsa, $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *fonksiyonuna* $\mathbb{V}$ *üzerinde norm,* $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ *ikilisine ise normlu uzay denir.*

Tanım 2.1.2. *$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{U}$ iki vektör uzay ve $S:\mathbb{V}\to\mathbb{U}$ operatörü verilsin. Her $x,y\in\mathbb{V}$ ve $\eta,\zeta\in\mathbb{F}$ için $S(\eta x+\zeta y)=\eta S(x)+\zeta S(y)$ eşitliğini sağlıyorsa S ye lineer operatör denir.*

Tanım 2.1.3. *$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{U}$ normlu uzaylar ve $S:\mathbb{V}\to\mathbb{U}$ lineer operatör verilsin. Her $x\in\mathbb{V}$ için $\|Sx\|\le A\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan bir A sabiti mevcutsa S ye sınırlı lineer operatör denir.*

Tanım 2.1.4. *$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{U}$ iki normlu uzay, $S:\mathbb{V}\to\mathbb{U}$ lineer operatör ve $x_0\in\mathbb{V}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\|x-x_0\|<\delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x\in\mathbb{V}$ için $\|Sx-Sx_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa S, x_0 noktasında süreklidir denir.*

Teorem 2.1.1. *$\mathbb{V}$ ve $\mathbb{U}$ normlu uzaylar ve $S:\mathbb{V}\to\mathbb{U}$ lineer operatör verilsin. S nin sürekli olması için gerek ve yeter şart S nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig, 1989).*

2.2. Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü

1951 yılında, $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$ üst yarı uzayında $\mathbb{R}_+$ öteleme olarak adlandırılan özel bir ötelemenin varlığı Levitan tarafından gösterilmiştir. Ardından Bessel diferensiyel operatörleriyle olan ilişkisini inceleyerek, söz konusu ötelemenin $(0,\infty)$ aralığındaki noktaları yine aynı aralık içerisinde bir noktaya dönüştürdüğünü göstermiştir (Levitan, 1951, 1967, 1973).

1967 yılında, $\mathbb{R}^n_+$ n-boyutlu yarı uzayda genelleştirilmiş öteleme Kipriyanov tarafından tanımlanmıştır (Kipriyanov, 1967). Ele alınan çalışmada, bu öteleme $(n-1)$ değişkene göre adi, n. değişkene göre $\mathbb{R}_+$ öteleme olarak incelenmiştir. Şimdi, sırasıyla $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^n_+$ ve $\mathbb{R}^n_{k,+}$ ötelemeleri takdim edelim:

Tanım 2.2.1. *$\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\tau_y\varphi(x)=\varphi(x+y)$ ile tanımlanan öteleme*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},\quad u(x,y)=\varphi(x)$$

denkleminin çözümüne tekabül eder ve adi öteleme olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2. *B_n Bessel operatör olmak üzere $\mathbb{R}_+$ öteleme, $B_xu=B_yu$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_y(x,0)=0$ başlangıç değer probleminin yani,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\gamma}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1}$$

denkleminin, $u\big|_{y=0}=\varphi(x)$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0}=0$ ifadelerini sağlayan bir çözümüne tekabül eder ve

$$u(x,y)=T^y_x\varphi(x)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2})\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

ile tanımlanır. Burada $T_x^0\varphi(x)=\varphi(x)$ olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Bununla birlikte, $\varphi(x)$, sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\frac{\partial}{\partial y}T_x^y\varphi(x)\Big|_{y=0}=0 \tag{2.2}$$

dır ve φ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türeve sahipse $T_x^y\varphi(x)$, (2.1) denkleminin çözümüne tekabül eder ve (2.2) elde edilebilir. $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x=(x',x_n)$, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$, $y=(y',y_n)$, $y'=(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1})$ ve

$$\Delta_{B_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Laplace-Bessel diferensiyel operatör olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\frac{\gamma}{y_n}\frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıda belirtilen başlangıç şartlarına göre çözümü

$$T_x^y\varphi(x)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}\int_0^{\pi}\varphi\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

dır. Bu operatör genelleştirilmiş öteleme operatörü olarak adlandırılmaktadır (Levitan, 1973). Bununla birlikte, $x=(x',x'')$, $x'=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$, $x''=(x_{k+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-k}$ ve

$$\Delta_B:=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},\quad 1\le k\le n$$

Laplace-Bessel diferensiyel operatör olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{y_i}\frac{\partial u}{\partial y_i}$$

denkleminin aynı şekilde yukarıdaki başlangıç şartlarına göre çözümü

$$T^y\varphi(x):=\frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\pi^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{\gamma_i}{2})}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\varphi\left[(x_1,y_1)_{\alpha_1},\ldots,(x_k,y_k)_{\alpha_k},x''-y''\right]\prod_{i=1}^{k}\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha_i$$

ile tanımlanır, burada $(x_i,y_i)_{\alpha_i}=(x_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i+y_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $1\le i\le k$, $1\le k\le n$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$,

$\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_k > 0$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ *ve* $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$ *dir (Klyuchantsev, 1970; Levitan 1951).*

2.3. Lebesgue Uzayları

(Ω, Σ, μ) ölçü uzayı ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ \varphi \in \mathscr{M}(\Omega, \Sigma) : \int_\Omega |\varphi|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine Lebesgue uzayı denir. L_p uzayında norm

$$\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |\varphi|^p d\mu \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\varphi(x)| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. φ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $K \subset \Omega$ herhangi bir kompakt küme olmak üzere

$$\int_K |\varphi| d\mu < \infty$$

ise φ fonksiyonu Ω da lokal integrallenebilir bir fonksiyondur ve $\varphi \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3.1. *(Ω, Σ, μ) ve $\mu(\Omega) = 1$ olsun. Her $x \in \Omega$ için $a < \psi(x) < b$ olmak üzere ψ, $L_1(\Omega, \mu)$ de reel bir fonksiyon ve φ, (a, b) aralığında konveks ise*

$$\varphi\left(\int_\Omega \psi d\mu \right) \leq \int_\Omega \varphi \circ \psi d\mu \qquad \text{(Jensen Eşitsizliği)}$$

olur (Diening vd., 2011).

Tanım 2.3.1. *φ integrallenebilir fonksiyon ve $\gamma > 0$ verilsin. $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayı $\|\varphi\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} < \infty$ özelliğini sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar kümesidir, burada*

$$\|\varphi\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |\varphi(x)|^p (x')^\gamma dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n_{k,+}} |\varphi(x)| \quad , & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3.2. *$1 \le p \le \infty$, $1 < p' < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $\varphi \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $\psi \in L_{p',\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ise $\varphi\psi \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ yani*

$$\|\varphi\psi\|_{L_{1,\gamma}} \le \|\varphi\|_{L_{p,\gamma}} \|\psi\|_{L_{p',\gamma}} \qquad \textit{(Hölder Eşitsizliği)}$$

olur.

Teorem 2.3.3. *$1 \le p \le \infty$ olmak üzere her $\varphi, \psi \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için*

$$\|\varphi + \psi\|_{L_{p,\gamma}} \le \|\varphi\|_{L_{p,\gamma}} + \|\psi\|_{L_{p,\gamma}} \qquad \textit{(Minkowski Eşitsizliği)}$$

olur.

2.4. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

$\mathbb{R}^n_{k,+}$ uzayında negatif olmayan lokal integrallenebilir ω fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır (Muckenhoupt, 1972). $\varphi \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = \left\{ \varphi : \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |\varphi(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma dx < \infty \right\}$$

kümesine $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve norm

$$\|\varphi\|_{L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |\varphi(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

ile tanımlanır ve $\omega = 1$ için $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayı $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $\|\varphi\|_{L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}$ normu $\|\varphi\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.1. *$1 < p < \infty$ ve $\omega \in \mathbb{R}^n$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere eğer*

$$[\omega]_{\mathscr{A}_p} := \sup_D \left(\frac{1}{|D|} \int_D \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|D|} \int_D \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty$$

ise ω, $\mathscr{A}_p$ Muckenhoupt sınıfına aittir denir. $p = 1$ için,

$$\frac{1}{|D|} \int_D \omega(x) dx \le A \operatorname*{ess\,inf}_{x \in D} \omega(x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $A > 0$ sabiti varsa $\omega \in \mathscr{A}_1$ dir ve $[\omega]_{\mathscr{A}_1}$ şeklinde gösterilir (Muckenhoupt, 1972).

Tanım 2.4.2. *Eğer $1 < p < \infty$ için*

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n_{k,+}\\ r>0}} \left(|\mathscr{D}(x,r)|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}(x,r)} \omega(y)(y')^\gamma dy \right) \left(|\mathscr{D}(x,r)|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)(y')^\gamma dy \right)^{p-1} < \infty$$

ise ω fonksiyonu $\mathscr{A}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ sınıfına aittir denir ve $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ ve $r > 0$ için

$$|\mathscr{D}(x,r)|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}(x,r)} \omega^{-\frac{1}{p-1}}(y)(y')^\gamma dy \le A \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathscr{D}(x,r)} \omega(y)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $A > 0$ sabiti varsa $\omega \in \mathscr{A}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olur (Guliyev, 2005).

$\mathscr{A}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ sınıfı özellikleri bakımından Muckenhoupt sınıfına benzerdir. Özellikle, $\omega \in \mathscr{A}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ise, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\omega \in \mathscr{A}_{p-\varepsilon,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $p_1 > p$ için $\omega \in \mathscr{A}_{p_1,\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$ olur. Özellikle vurgulanmalıdır ki, $1 < p < \infty$ için $|x|^\beta \in \mathscr{A}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olması için gerek ve yeter şart $-Q < \beta < Q(p-1)$ olmasıdır. Benzer şekilde, $|x|^\beta \in \mathscr{A}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olması için gerek ve yeter şart $-Q < \beta \le 0$ olmasıdır (Guliyev, 2005).

2.5. Değişken Üslü Lebesgue Uzayları $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_+)$

Bu kısımda, değişken üslü Lebesgue uzayları ve özellikleri takdim edilecektir.

$\mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{k,+})$, tüm ölçülebilir $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{k,+} \to [1,\infty]$ fonksiyonlarının kümesini göstermek üzere $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ nin elemanlarına değişken üs fonksiyonları adı verilir. Değişken üs fonksiyonları $p(\cdot)$ ile gösterilmektedir. $\mathbb{R}_+$ uzayında, üs fonksiyonlarına $1 \le p \le \infty$ için $p(x) = p$ ya da $p(x) = \sin x + 5$ örnek olarak verilebilir. Bununla birlikte üs fonksiyonlarının sınırlı ya da sınırsız olabileceğini belirtelim. Örneğin, $\Omega = (0,\infty)$ üzerinde tanımlı $p(x) = \cos x + 2$ fonksiyonu sınırlı üs fonksiyonu iken $\Omega = (1,\infty)$ aralığında tanımlı $p(x) = x+2$ üs fonksiyonu ise sınırsız üs fonksiyonudur. Bu örnekler, üs fonksiyonlarının niteliklerini ayırt etmede oldukça açıklayıcıdır. $p(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve

$$p_-(\mathbb{R}^n_{k,+}) = p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n_{k,+}} p(x), \quad p_+(\mathbb{R}^n_{k,+}) = p_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n_{k,+}} p(x)$$

olsun. Bu durumda, üs fonksiyonu $1 \le p_- \le p(x) \le p_+ < \infty$, $1 < p_- \le p(x) \le p_+ < \infty$ durumlardan birini sağlar. Klasik Lebesgue uzaylarına benzer şekilde, bu uzaylarda da $p(x) = 1$, $1 < p(x) < \infty$ ve $p(x) = \infty$ durumları birbirinden ayrılmaktadır. Bu nedenle $\mathbb{R}^n_{k,+}$ nın alt kümelerini tanımlayalım:

$$(\mathbb{R}^n_{k,+})^{p(\cdot)}_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} : p(x) = \infty\},$$

$$(\mathbb{R}^n_{k,+})^{p(\cdot)}_{1} = \{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} : p(x) = 1\},$$

$$(\mathbb{R}^n_{k,+})^{p(\cdot)}_{0} = \{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} : 1 < p(x) < \infty\}.$$

$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dir ve $p'(x)$ eşlenik üs fonksiyonu

$$p'(x) := \begin{cases} \infty, & x \in (\mathbb{R}^n_{k,+})^{p(\cdot)}_{1} \\ \frac{p(x)}{p(x)-1}, & x \in (\mathbb{R}^n_{k,+})^{p(\cdot)}_{0} \\ 1, & x \in (\mathbb{R}^n_{k,+})^{p(\cdot)}_{\infty} \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Değişken üs fonksiyonları için Laplace-Bessel diferensiyel operatöre bağlı log-Hölder süreklilik şartının analogu olan aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 2.5.1. *$p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{k,+} \to [1,\infty)$ verilsin. $|x-y| \leq \dfrac{1}{2}$ özelliğini sağlayan her $x, y \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ için*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A_0}{-\log|x-y|} \tag{2.3}$$

ve

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{A_\infty}{\log(e+|x|)} \tag{2.4}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $A_0, A_\infty > 0$ sabitleri ve p_∞ varsa bu durumda $p(\cdot)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n_{k,+}$ üzerinde log-Hölder süreklidir denir, burada $p_\infty = \lim_{x\to\infty} p(x) > 1$ dir. Eğer $p(\cdot)$ sırasıyla (2.3) ve (2.4) yi sağlıyorsa bu durumda $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}_{\infty}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ile gösterilir.

$p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{k,+} \to [1,\infty)$ değişken üs fonksiyonu verilsin. Değişken üslü Lebesgue uzayı $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$,

$$\|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\gamma}(f/\lambda) \leq 1\right\} < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesidir, burada $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f)$ modüler fonksiyondur ve

$$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) := \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|^{p(x)} (x')^{\gamma} dx$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Şimdi modüler fonksiyonun başlıca özelliklerini aşağıdaki önerme ile ifade edelim:

Önerme 2.5.2. *$p(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ verilsin.*

i. *Her f için $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) \geq 0$ ve $\rho_{p(\cdot),\gamma}(|f|) = \rho_{p(\cdot),\gamma}(f)$ olur.*

ii. *$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) = 0$ olması için gerek ve yeter şart hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ için $f(x) = 0$ olmasıdır.*

iii. *$\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) < \infty$ ise hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ için $f(x) < \infty$ olur.*

iv. *$\eta, \zeta \geq 0$ ve $\eta + \zeta = 1$ olsun. $\rho_{p(\cdot),\gamma}(\eta f + \zeta g) \leq \eta\, \rho_{p(\cdot),\gamma}(f) + \zeta\, \rho_{p(\cdot),\gamma}(g)$ ise $\rho_{p(\cdot),\gamma}$ konvekstir.*

v. *$|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f) \leq \rho_{p(\cdot),\gamma}(g)$ olur.*

vi. *$\rho_{p(\cdot),\gamma}$ süreklidir. $\Lambda > 0$ için $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f/\Lambda) < \infty$ ise $\lambda \mapsto \rho_{p(\cdot),\gamma}(f/\lambda)$, $[\Lambda, \infty)$ üzerinde sürekli ve azalandır. Bununla birlikte, $\lambda \to \infty$ iken $\rho_{p(\cdot),\gamma}(f/\lambda) \to 0$ olur.*

Eğer $\eta > 1$ ise $\eta \rho_{p(\cdot),\gamma}(f) \leq \rho_{p(\cdot),\gamma}(\eta f)$ ve eğer $0 < \eta < 1$ ise $\rho_{p(\cdot),\gamma}(\eta f) \leq \eta \rho_{p(\cdot),\gamma}(f)$ olur. Bu, $\rho_{p(\cdot),\gamma}$ nın konveksliğinin bir sonucudur.

Aşağıdaki lemmada $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için Hölder eşitsizliğinin analogu verilmektedir:

Lemma 2.5.3. *$p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{k,+} \to [1, \infty)$ verilsin. Her $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $h \in L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)h(x)|\, (x')^{\gamma} dx \leq A\, \|f\|_{p(\cdot),\gamma} \|h\|_{p'(\cdot),\gamma}$$

olur, burada $A = A\,(p(\cdot), p'(\cdot), \gamma) > 0$ sabit, $p'(\cdot)$, $p(\cdot)$ fonksiyonunun eşleniğidir (Ekincioğlu vd., 2020).

Teorem 2.5.1. *$p(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{+})$ olmak üzere $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ bir vektör uzayıdır.*

Önerme 2.5.4. *$p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{+} \to [0, 1)$ Lebesgue ölçülebilir olsun. $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayının vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart $p_{+} < \infty$ olmasıdır (Sharapudinov, 2012).*

Sonuç 2.5.2. *$p(\cdot), r(\cdot), q(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olmak üzere $\dfrac{1}{p(x)} = \dfrac{1}{q(x)} + \dfrac{1}{r(x)}$ ile tanımlansın. Her $f \in L_{q(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $g \in L_{r(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{+})$ için $fg \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olup*

$$\|fg\|_{p(\cdot),\gamma} \leq A\, \|f\|_{q(\cdot),\gamma} \|g\|_{r(\cdot),\gamma}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $A > 0$ sabiti vardır.

2.6. B-Maksimal Operatörler ve Komütatörleri

$f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal operatör $D(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ olmak üzere

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |D(x,r)|^{-1} \int_{D(x,r)} |f(y)| dy$$

ile tanımlanır.

$f \in L_{1,\gamma}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olsun. B-maksimal operatör $\mathscr{D}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n_{k,+} : |x-y| < r\}$ olmak üzere

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} |\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y |f(x)| (y')^\gamma dy$$

ile tanımlanır. Ölçülebilir $\mathscr{D}(0,r) \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ kümesi için

$$|\mathscr{D}(0,r)|_\gamma = \int_{\mathscr{D}(0,r)} (x')^\gamma dx = r^Q \frac{\pi^{\frac{n-k}{2}}}{2^k} \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}, \qquad Q = n + |\gamma|$$

dir, burada $(x')^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\gamma_k}$ ve $\Gamma(\gamma) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$ dir (Guliyev, 2003). $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ için

$$M_{\mathscr{D},\gamma} f := |\mathscr{D}(x,r)|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} T^y |f(x)| (y')^\gamma dy$$

yazılabilir ve buradan

$$M_\gamma f := \sup_{\mathscr{D}(x,r)} M_{\mathscr{D},\gamma} f$$

elde edilebilir, burada supremum tüm $\mathscr{D}$ yuvarları üzerinden alınmaktadır.

$0 < p < \infty$ ve $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ olsun. $f \in L^{\text{loc}}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}) \cap L^{\text{loc}}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ verildiğinde

$$\begin{aligned}
f_{\mathscr{D}} &:= |\mathscr{D}(x,r)|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}} T^y f(x)(y')^{\gamma} dy, \\
M_{s,\mathscr{D},\gamma} &:= \left(|\mathscr{D}(x,r)|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}} T^y |f(x)|^s (y')^{\gamma} dy \right)^{\frac{1}{s}}, \\
M^{\sharp}_{s,\mathscr{D},\gamma} &:= \left(|\mathscr{D}(x,r)|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}} |T^y f(x) - f_{\mathscr{D}}|^s (y')^{\gamma} dy \right)^{\frac{1}{s}}, \\
M_{s,\gamma} f(x) &:= \sup_{\mathscr{D}(x,r)} M_{s,\mathscr{D},\gamma} f, \\
M^{\sharp}_{s,\gamma} f(x) &:= \sup_{\mathscr{D}(x,r)} M^{\sharp}_{s,\mathscr{D},\gamma} f
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $f^{\sharp}$ sharp fonksiyon $f^{\sharp} := M^{\sharp}_{1,\gamma} f$ şeklinde tanımlanmaktadır ve $f \in BMO_{\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olması için gerek ve yeter şart $f^{\sharp} \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olmasıdır. Ayrıca, $M_{1,\gamma} f = M_{\gamma} f$ olduğu aşikardır. Bununla birlikte, Jensen eşitsizliği yardımıyla $p_1 \leq p_2$ için $M_{p_1,\gamma} f \leq M_{p_2,\gamma} f$ ve $M^{\sharp}_{p_1,\gamma} f \leq M^{\sharp}_{p_2,\gamma} f$ elde edilebilir.

Sharp B-maksimal operatör $M^{\sharp}_{\gamma}$

$$M^{\sharp}_{\gamma} f(x) = \sup_{r>0} |\mathscr{D}(0,r)|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}(0,r)} |T^y f(x) - f_{\mathscr{D}(0,r)}(x)|(y')^{\gamma} dy$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $M^{\sharp}_{\gamma} f(x) \leq 2 M_{\gamma} f(x)$ olduğundan, Lemma 3.0.1 den dolayı $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için sharp B-maksimal operatör $M^{\sharp}_{\gamma}$ $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlıdır.

$B - BMO$ uzayı

$$\|f\|_{BMO_{\gamma}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} \\ r>0}} |\mathscr{D}(0,r)|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}(0,r)} |T^y f(x) - f_{\mathscr{D}(0,r)}(x)|(y')^{\gamma} dy < \infty$$

olacak şekilde lokal integrallenebilir f fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır ve $BMO_{\gamma} = BMO_{\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{R}^n_{k,+}$ üzerinde tanımlı bir b fonksiyonu için

$$b^-(x) = \begin{cases} 0, & b(x) \geq 0, \\ |b(x)|, & b(x) < 0, \end{cases}$$

ve $b^+(x) := |b(x)| - b^-(x)$ olarak tanımlayalım, burada $b^+(x) - b^-(x) = b(x)$ olduğu açıktır.

Ölçülebilir bir b fonksiyonu verildiğinde B-maksimal operatörün komütatörü $[M_{\gamma}, b]$ ve

B-maksimal komütatör $M_{b,\gamma}$ sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$[M_\gamma, b](f) = M_\gamma(bf) - bM_\gamma(f),$$

$$M_{b,\gamma}(f)(x) = \sup_{r>0} |\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y |(b(x) - b(y)) f(x)| (y')^\gamma dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_{k,+}.$$

Esas olarak, B-maksimal operatörün komütatörü ve B-maksimal komütatör birbirlerinden farklıdır. Gerçekten, $M_{b,\gamma}$ pozitif ve altlineer operatördür, fakat $[M_\gamma, b]$ ne pozitiftir ne de altlineerdir. Bununla birlikte, eğer b bazı şartları sağlıyorsa bu durumda $[M_\gamma, b]$ operatörü $M_{b,\gamma}$ tarafından kontrol edilebilir.

3. LAPLACE-BESSEL OPERATÖRE BAĞLI MAKSİMAL OPERATÖRLERİN KOMÜTATÖRLERİNİN DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARDA SINIRLILIĞI

Harmonik analizde elde edilen bazı önemli sonuçların değişken üslü Lebesgue uzaylarına genelleştirilebilmesini mümkün kılan üs sınıfını tanımlayalım. B-maksimal operatörün $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlı olmasını sağlayan $p(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlarının kümesi $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n_+)$ ile gösterilir.

Lemma 3.0.1. *Eğer $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ise $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olur (Cruz-Uribe vd., 2003).*

Aşağıdaki lemmada değişken üslü Lebesgue uzayları için bazı sonuçlar verilmiştir. (Diening, 2005) de yer alan Teorem 8.1 e göre $\mathscr{B}$ nin aşağıdaki karakterizasyonu elde edilebilir:

Lemma 3.0.2. *$1 < p_- \le p_+ < \infty$ olmak üzere $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{k,+} \to (1,\infty)$ Lebesgue ölçülebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

i. $p(\cdot) \in \mathscr{B}$.

ii. $p'(\cdot) \in \mathscr{B}$.

iii. $1 < q < p_-$ *için* $p(\cdot)/q \in \mathscr{B}$.

iv. $1 < q < p_-$ *için* $(p(\cdot)/q)' \in \mathscr{B}$ *(Ekincioğlu vd., 2020).*

Lemma 3.0.3. *$p(\cdot) \in \mathscr{B}$ verilsin. Herhangi bir $\mathscr{D} \in \mathbb{D}$ için*

$$|\mathscr{D}|_\gamma \le \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}} \le A|\mathscr{D}|_\gamma \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $A > 0$ sabiti vardır, burada $\mathbb{D} = \{\mathscr{D}(x,r) : x \in \mathbb{R}^n_{k,+}, r > 0\}$ dir (Izuki, 2010).

Şimdi, (Diening vd., 2011) Teorem 7.2.1 ve Teorem 7.2.4 den değişken üslü Lebesgue uzayları için bir ekstrapolasyon sonucunu hatırlayalım.

Teorem 3.0.1. *Ölçülebilir fonksiyonların sıralı ikililerinin bir $\mathscr{F}$ ailesi verilsin. $0 < p_0 < \infty$, $(h,g) \in \mathscr{F}$ ve $\omega \in \mathscr{A}_{1,\gamma}$ için*

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} (h(x))^{p_0} \omega(x)(x')^\gamma dx \le A_0 \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} (g(x))^{p_0} \omega(x)(x')^\gamma dx, \qquad (h,g) \in \mathscr{F} \tag{3.2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim, burada A_0 *sadece* p_0 *ve* $[\omega]_{\mathscr{A}_{1,\gamma}}$ *ya bağlıdır.* $0 < p_0 < p_- \le p_+ < \infty$ *olmak üzere* $p(\cdot) : \mathbb{R}^n_{k,+} \to [1,\infty)$ *olsun. Eğer* $(p(\cdot)/p_0)' \in \mathscr{B}$ *ise* $(h,g) \in \mathscr{F}$ *için*

$$\|h\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \le A\|g\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \tag{3.3}$$

olacak şekilde $A > 0$ *sabiti vardır. Ayrıca, her* $1 < q < \infty$ *ve* $\{(h_i,g_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ *için*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} h_i^q \right)^{1/q} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \le A \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^q \right)^{1/q} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}} \tag{3.4}$$

olur, burada $A > 0$ *sabittir (Ekincioğlu vd., 2020).*

Yukarıdaki teoremde, ekstrapolasyon teorisinde yaygın olarak kullanılan bir yaklaşım sunulmaktadır. Bu teorem, tümevarım teorisinin lineer operatörler için sınırlılık sonuçları sunmakla sınırlı olmadığını, aynı zamanda vektör değerli eşitsizliklerin elde edilmesinde de kullanılabileceğini göstermektedir. $\mathscr{F}$ ile negatif olmayan Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan (h,g) sıralı çiftlerinin bir ailesi ifade edilmektedir.

3.1. B-Maksimal Komütatörlerinin Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarda Sınırlılığı

Lemma 3.1.1. $1 < s < \infty$*,* $b \in BMO_\gamma$ *olsun. Bu durumda*

$$M^\sharp_\gamma(M_{b,\gamma}f)(x) \le A_1\|b\|_{BMO_\gamma}(M_\gamma(M_\gamma f)^s)^{1/s}(x) + M_\gamma(M_\gamma|f|^s)^{1/s}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $A_1 > 0$ *sabiti vardır.*

İspat. M_γ operatörünün tanımı ve $M^\sharp_\gamma f(x) \le 2M_\gamma f(x)$ eşitsizliği kullanılarak

$$M^\sharp_\gamma(M_{b,\gamma}f)(x) \le 2M_\gamma(M_{b,\gamma}f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$$

yazılabilir. Hölder eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,t)} T^z(|b(x)-b(z)||f(x)|)(z')^\gamma dz \\
&\le |\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,t)} T^z(|b(x)-b_{\mathscr{D}(0,t)}||f(x)|)(z')^\gamma dz + |\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,t)} |b(z)-b_{\mathscr{D}(0,t)}|T^z(|f|)(x)(z'
\\
&\le |\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\left(\int_{\mathscr{D}(0,t)} T^z|b(x)-b_{\mathscr{D}(0,t)}|^{s'}(z')^\gamma dz\right)^{1/s'}\left(\int_{\mathscr{D}(0,t)} T^z(|f|)^s(x)(z')^\gamma dz\right)^{1/s} \\
&\qquad + |\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,t)} |b(z)-b_{\mathscr{D}(0,t)}|T^z(|f|)(x)(z')^\gamma dz \\
&\le A\|b\|_{BMO_\gamma}(M_\gamma|f|^s)^{1/s}(x) + |\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,t)} |b(z)-b_{\mathscr{D}(0,t)}|T^z(|f|)(x)(z')^\gamma dz
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y\left[|\mathscr{D}(0,t)|_\gamma^{-1}\left(\int_{\mathscr{D}(0,t)} |b(z)-b_{\mathscr{D}(0,t)}|T^z(|f|)(x)(z')^\gamma dz\right)\right](y')^\gamma dy \\
&\le |\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y[|b(z)-b_{\mathscr{D}(0,t)}|M_\gamma f(x)](y')^\gamma dy \\
&\le |\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1}\left(\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y|b(z)-b_{\mathscr{D}(0,r)}|^{s'}(y')^\gamma dy\right)^{1/s'}\left(\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y(M_\gamma f)^s(x)(y')^\gamma dy\right)^{1/s} \\
&\qquad + |\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y[|b_{\mathscr{D}(0,t)}-b_{\mathscr{D}(0,r)}|M_\gamma f(x)](y')^\gamma dy \\
&\le A\|b\|_{BMO_\gamma}(M_\gamma(M_\gamma f)^s)^{1/s}(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
M_\gamma(M_{b,\gamma}f)(x) &= \sup_{r>0}|\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y[M_{b,\gamma}f](x)(y')^\gamma dy \\
&\le A\|b\|_{BMO_\gamma}\left((M_\gamma(M_\gamma f)^s)^{1/s}(x) + \sup_{r>0}|\mathscr{D}(0,r)|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}(0,r)} T^y(M_\gamma|f|^s)^{1/s}(x)(y')^\gamma dy\right) \\
&\le A\|b\|_{BMO_\gamma}\left((M_\gamma(M_\gamma f)^s)^{1/s}(x) + M_\gamma(M_\gamma|f|^s)^{1/s}(x)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki lemma (Segovia ve Torrea, 1989) dan elde edilebilir.

Lemma 3.1.2. $1<p<\infty$ *ve* $b\in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *olsun. Her* $\omega\in\mathscr{A}_{p,\gamma}$ *için*

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \left(M_{b,\gamma}(f)(x)\right)^p \omega(x)(x')^\gamma dx \le A\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|^p\omega(x)(x')^\gamma dx$$

olur. υ bir ağırlık fonksiyonu olsun. Her $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ için

$$\left(|\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} \upsilon(x)^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(|\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} \upsilon(x)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq A$$

olacak şekilde bir A sabiti varsa $\upsilon \in \mathscr{A}(p,q)$ $(1 < p,q < \infty)$ olur.

Lemma 3.1.3. *$p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $b \in L^{\text{loc}}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olsun. $M_{b,\gamma}$ operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olmasıdır.*

İspat. Yeter Şart: $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğundan, Lemma 3.0.2 den $(p(\cdot)/p_0)' \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olacak şekilde bir p_0 $(1 < p_0 < p_-)$ vardır. p_0 ve her $\omega \in \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_{p_0}$ için Lemma 3.1.2 den

$$\int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} \left(M_{b,\gamma}(f)(x)\right)^{p_0} \omega(x)(x')^\gamma dx \leq A \int_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|^{p_0} \omega(x)(x')^\gamma dx$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 3.0.1 in ilk kısmı $\left(M_{b,\gamma}(f), f\right)$ sıralı ikilisine uygulanır. Gerek Şart: Her $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ ve $y \in \mathscr{D}$ için $M_{b,\gamma}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} |b(y) - b(x)|\, \chi_{\mathscr{D}}(x)(x')^\gamma dx &\leq \sup_{\mathscr{D}' \ni y} |\mathscr{D}'|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}'} |b(y) - b(x)|\, \chi_{\mathscr{D}}(x)(x')^\gamma dx \\ &= M_{b,\gamma}(\chi_{\mathscr{D}})(y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 2.5.3, Lemma 3.0.3 ve $M_{b,\gamma}$ operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlılığından

$$\begin{aligned} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} |b(y) - b_{\mathscr{D}}|\,(y')^\gamma dy &= |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} \left| |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} (b(y) - b(x))\,(x')^\gamma dx \right| (y')^\gamma dy \\ &\leq |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} \left(|\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} |b(y) - b(x)|\, \chi_{\mathscr{D}}(x)(x')^\gamma dx \right) (y')^\gamma dy \\ &\leq |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} M_{b,\gamma}(\chi_{\mathscr{D}})(y)(y')^\gamma dy \\ &= |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} M_{b,\gamma}(\chi_{\mathscr{D}})(y) \cdot \chi_{\mathscr{D}}(y)(y')^\gamma dy \\ &\leq A |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \|M_{b,\gamma}(\chi_{\mathscr{D}})\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\ &\leq A |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\ &\leq A \end{aligned}$$

elde edilir, bu da $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğunu gösterir. ■

Önerme 3.1.4. *Eğer $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ise bu durumda $\left[M_\gamma, b\right]$ ve $\left[M^\sharp_\gamma, b\right]$ operatörleri $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında iyi tanımlıdır.*

İspat. Her $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için

$$\left\|M_\gamma f\right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \le A \left\|f\right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}$$

olduğu bilinmektedir. Bu, $M_\gamma f$ operatörünün ve dolayısıyla $b(x)M_\gamma f$ in $\mathbb{R}^n_{k,+}$ üzerine hemen hemen her yerde sonlu olduğunu gösterir. Buradan, $[M_\gamma, b]f(x) = M_\gamma(bf)(x) - b(x)M_\gamma f(x)$ operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında iyi tanımlı olduğu sonucu elde edilir. Ayrıca, $|b(x)M^\sharp_\gamma f(x)| \le 2|b(x)|M_\gamma f(x) < \infty$ (h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$) olduğundan $[M^\sharp_\gamma, b]f(x)$ operatörü de $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında iyi tanımlıdır. ∎

3.2. B-Maksimal Operatörlerin Komütatörlerinin Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarda Sınırlılığı

Teorem 3.2.1. *$p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olsun. Eğer $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $b \ge 0$ ise bu durumda $\left[M_\gamma, b\right]$ ve $\left[M^\sharp_\gamma, b\right]$ operatörleri $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlıdır.*

İspat. $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $b \ge 0$ olsun. $M_\gamma f(x) < \infty$ özelliğini sağlayan bir $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ için ve $b \ge 0$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned}
\left|[M_\gamma, b]f(x)\right| &= \left|M_\gamma(bf)(x) - b(x)M_\gamma f(x)\right| \\
&= \left|\sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} b(y)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy - \sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} b(x)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy\right| \\
&\le \sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \left|\int_{\mathscr{D}} b(y)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy - \int_{\mathscr{D}} b(x)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy\right| \\
&\le \sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} |b(y) - b(x)|\, T^y|f(x)|(y')^\gamma dy \\
&= M_{b,\gamma} f(x) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\left|[M^\sharp_\gamma, b]f(x)\right| &= \left|M^\sharp_\gamma(bf)(x) - b(x)M^\sharp_\gamma f(x)\right| \\
&= \left|\sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} b(y)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy - \sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} b(x)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy\right| \\
&\le \sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \left|\int_{\mathscr{D}} b(y)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy - \int_{\mathscr{D}} b(x)T^y|f(x)|(y')^\gamma dy\right| \\
&\le \sup_{x\in\mathscr{D}} |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} |b(y) - b(x)|\, T^y|f(x)|(y')^\gamma dy \\
&= M_{b,\gamma} f(x) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $f \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ iken hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$ için $M_\gamma f < \infty$ olduğundan (3.5) ve (3.6), $\mathbb{R}^n_{k,+}$ de h.h.h. yerde sağlanır. Lemma 3.1.3 den $[M_\gamma, b]$ ve $[M^\sharp_\gamma, b]$ operatörlerinin $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlılığı elde edilmiş olur. Böylece, ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.2. *b, $\mathbb{R}^n_{k,+}$ de reel değerli ve lokal integrallenebilir bir fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

i. *$b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$.*

ii. *Her $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için $\left[M_\gamma, b\right]$ komütatörü $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlıdır.*

iii. *Bazı $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için $\left[M_\gamma, b\right]$ komütatörü $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlıdır.*

iv.

$$\sup_{\mathscr{D}} \frac{\left\| \left(b - M_{\gamma,\mathscr{D}}(b)\right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}}{\|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}} < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ vardır.

v. *Her $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için*

$$\sup_{\mathscr{D}} \frac{\left\| \left(b - M_{\gamma,\mathscr{D}}(b)\right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}}{\|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}} < \infty.$$

İspat. $(ii) \Rightarrow (iii)$ ve $(v) \Rightarrow (iv)$ kolaylıkla elde edilebilir. $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ ve $(iv) \Rightarrow (i)$ durumlarını ispatlayalım. $(ii) \Rightarrow (v)$ in ispatı $(iii) \Rightarrow (iv)$ ün ispatına benzer şekilde elde edilebilir.

$(i) \Rightarrow (ii)$. $[M_\gamma, b]$ operatörünün tanımından ve $|b| - b = 2b^-$ ve $M_\gamma(bf)(x) = M_\gamma\left(|b| f\right)(x)$ olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \left| \left[M_\gamma, b\right] f(x) - \left[M_\gamma, |b|\right] f(x) \right| &\le \left| M_\gamma(bf)(x) - M_\gamma(|b| f)(x) \right| + \left| \left(|b(x)| - b(x)\right) M_\gamma(f)(x) \right| \\ &\le 2b^-(x) M_\gamma(f)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left| \left[M_\gamma, b\right] f(x) \right| &\le \left| \left[M_\gamma, b\right] f(x) - \left[M_\gamma, |b|\right] f(x) \right| + \left| \left[M_\gamma, |b|\right] f(x) \right| \\ &\le 2b^-(x) M_\gamma(f)(x) + \left[M_\gamma, |b|\right] f(x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

yazılabilir. $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ iken $|b| \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğu, M_γ operatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlılığı ve $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğu dikkate alındığında (3.7) ve Teorem 3.2.1 den dolayı, her $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için

$$
\begin{aligned}
\left\| [M_\gamma, b] f \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} &\leq 2 \left\| b^- \right\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \left\| M_\gamma(f) \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} + \left\| [M_\gamma, |b|] f \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A \|f\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

$\underline{(iii) \Rightarrow (iv)}$. Her $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ ve $x \in \mathscr{D}$ için

$$M_\gamma(\chi_{\mathscr{D}})(x) = M_{\mathscr{D}}(\chi_{\mathscr{D}})(x) = \chi_{\mathscr{D}}(x)$$

ve

$$M_\gamma(b\chi_{\mathscr{D}})(x) = M_{\mathscr{D},\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}})(x) = M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda (iii) den dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(b - M_{\mathscr{D},\gamma}(b)\right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} &= \left\| \left(b M_\gamma(\chi_{\mathscr{D}}) - M_\gamma(b\chi_{\mathscr{D}})\right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq \left\| b M_\gamma(\chi_{\mathscr{D}}) - M_\gamma(b\chi_{\mathscr{D}}) \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq \left\| [M_\gamma, b] \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A \left\| \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}
\end{aligned}
$$

olacak şekilde $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ fonksiyonu vardır.

$\underline{(iv) \Rightarrow (i)}$. $\mathscr{D}$ sabit bir yuvar olsun. Lemma 2.5.3, Lemma 3.0.3 ve (iv) hipotezinden

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} \left| b(x) - M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x) \right| (x')^\gamma dx &= |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \int_{\mathscr{D}} \left| \left(b(x) - M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)\right) \chi_{\mathscr{D}}(x) \right| (x')^\gamma dx \\
&\leq A |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \left\| \left(b - M_{\mathscr{D},\gamma}(b)\right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A |\mathscr{D}|_\gamma^{-1} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$X = \{x \in \mathscr{D} : b(x) \leq b_{\mathscr{D}}\}$ ve $Y = \{x \in \mathscr{D} : b(x) > b_{\mathscr{D}}\}$ olsun. Aşağıdaki eşitlik açık bir şekilde doğrudur (Bastero, 2000):

$$\int_X |b(x)-b_{\mathscr{D}}|\,(x')^\gamma dx = \int_Y |b(x)-b_{\mathscr{D}}|\,(x')^\gamma dx.$$

Her $x \in X$için $b(x) \leq b_{\mathscr{D}} \leq |b_{\mathscr{D}}| \leq M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)$ olduğundan bu durumda $x \in X$ için

$$|b(x)-b_{\mathscr{D}}| \leq \left|b(x)-M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)\right|$$

yazılabilir. (3.8) uygulanarak

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}} |b(x)-b_{\mathscr{D}}|\,(x')^\gamma dx &= |\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_{X\cup Y} |b(x)-b_{\mathscr{D}}|\,(x')^\gamma dx \\
&= 2|\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_X |b(x)-b_{\mathscr{D}}|\,(x')^\gamma dx \\
&= 2|\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_X \left|b(x)-M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)\right|(x')^\gamma dx \\
&= 2|\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_E \left|b(x)-M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)\right|(x')^\gamma dx \\
&\leq A
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, BMO_γ uzayının tanımı ile $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ sonucu elde edilir.

Şimdi, $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğunu gösterelim. Dikkat edilmelidir ki, $x \in \mathscr{D}$ için $0 \leq b^+ \leq |b(x)| \leq M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)$ dir. Bundan dolayı, her $x \in \mathscr{D}$ için

$$0 \leq b^- \leq M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x) - b^+(x) + b^-(x) = M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x) - b(x)$$

olur. Bu durumda, her $\mathscr{D}$ yuvarı için

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}} b^-(x)(x')^\gamma dx &\leq |\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}} \left(M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)-b(x)\right)(x')^\gamma dx \\
&\leq |\mathscr{D}|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}} \left|b(x)-M_{\mathscr{D},\gamma}(b)(x)\right|(x')^\gamma dx \\
&\leq A
\end{aligned}$$

elde edilir, burada son satır (3.8) dan elde edilmiştir.

Böylece, Lebesgue diferensiyelleme teoremi ile $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Sharp B-maksimal operatörün komütatörü için benzer sonuçlar geçerlidir.

Teorem 3.2.3. *b, $\mathbb{R}^n_{k,+}$ üzerinde reel değerli, lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler denktir:*

i. $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *ve* $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$.

ii. *Her* $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *için* $\left[M^\sharp_\gamma, b\right]$ *komütatörü* $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *uzayında sınırlıdır.*

iii. *Bazı* $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *için* $\left[M^\sharp_\gamma, b\right]$ *komütatörü* $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *uzayında sınırlıdır.*

iv.

$$\sup_{\mathscr{D}} \frac{\left\| \left(b - 2M^\sharp_\gamma(b\chi_{\mathscr{D}})\right)\chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}}{\|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}} < \infty$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *fonksiyonu vardır.*

v. *Her* $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *için*

$$\sup_{\mathscr{D}} \frac{\left\| \left(b - 2M^\sharp_\gamma(b\chi_{\mathscr{D}})\right)\chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}}{\|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}} < \infty.$$

İspat. Teorem 3.2.2 nin ispatında kullanılan tekniklerin benzer şekilde uygulanmasıyla ispat elde edilebilir. Aynı şekilde, sadece $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ ve $(iv) \Rightarrow (i)$ durumlarını gösterelim.

$\underline{(i) \Rightarrow (ii).}$ $|b| - b = 2b^-$ olduğu göz önüne alındığında, $[M^\sharp_\gamma, b]$ operatörünün tanımı ile

$$\begin{aligned}
\left| \left[M^\sharp_\gamma, b\right] f(x) - \left[M^\sharp_\gamma, |b|\right] f(x) \right| &\leq \left| M^\sharp_\gamma(bf)(x) - M^\sharp_\gamma\left(|b|f\right)(x) \right| + \left| |b(x)| M^\sharp_\gamma(f)(x) - b(x) M^\sharp_\gamma f(x) \right| \\
&\leq \left| M^\sharp_\gamma | \left((b - |b|)f\right)(x) \right| + 2b^-(x) M^\sharp_\gamma f(x) \\
&\leq M^\sharp_\gamma\left(2b^- f\right)(x) + 2b^-(x) M^\sharp_\gamma f(x)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\left| \left[M^\sharp_\gamma, b\right] f(x) \right| &\leq \left| \left[M^\sharp_\gamma, b\right] f(x) - \left[M^\sharp_\gamma, |b|\right] f(x) \right| + \left| \left[M^\sharp_\gamma, |b|\right] f(x) \right| \\
&\leq M^\sharp_\gamma\left(2b^- f\right)(x) + 2b^-(x) M^\sharp_\gamma(f)(x) + \left| \left[M^\sharp_\gamma, |b|\right] f(x) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ ve $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için $M^\sharp_\gamma$ operatörü $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlı olduğundan, Teorem 3.2.1 ve üçgen eşitsizliğinden $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ için $\left[M^\sharp_\gamma, b\right]$ komütatörünün $L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ uzayında sınırlı olduğu kolaylıkla elde edilebilir.

$\underline{(iii) \Rightarrow (iv).}$ $\mathscr{D}$ sabit bir yuvar ve $\mathscr{D}_1$ farklı bir yuvar olsun. $4ac \leq (a+c)^2$ eşitsizliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_1}\left|\chi_{\mathscr{D}}(x)-(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_1}\right|(x')^\gamma dx\\
&\quad=|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\left\{\int_{\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}}\left|\chi_{\mathscr{D}}(x)-(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_1}\right|(x')^\gamma dx+\int_{\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}}\left|\chi_{\mathscr{D}}(x)-(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_1}\right|(x')^\gamma dx\right\}\\
&\quad=|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\left\{\int_{\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}}\left|(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_1}\right|(x')^\gamma dx+\int_{\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}}\left|1-(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_1}\right|(x')^\gamma dx\right\}\\
&\quad=|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\left\{\int_{\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}}\left||\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}}\chi_{\mathscr{D}}(y)(y')^\gamma dy\right|(x')^\gamma dx\right.\\
&\qquad\left.+\int_{\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}}\left||\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_1}\chi_{\mathscr{D}_1}(y)(y')^\gamma dy-|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_1}\chi_{\mathscr{D}}(y)-\chi_{\mathscr{D}_1}(y)(y')^\gamma dy\right|(x')^\gamma dx\right\}\\
&\quad=|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\left\{\frac{|\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}|_\gamma|\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}|_\gamma}{|\mathscr{D}_1|_\gamma}+|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}}\left|\int_{\mathscr{D}_1}\chi_{\mathscr{D}_1}(y)\left(1-\chi_{\mathscr{D}}(y)\right)(y')^\gamma dy\right|(x')^\gamma dx\right\}\\
&\quad=|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-2}\left\{|\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}|_\gamma|\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}|_\gamma+|\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}|_\gamma|\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}|_\gamma\right\}\\
&\quad=\frac{2|\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}|_\gamma|\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}|_\gamma}{\left(|\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}|_\gamma+|\mathscr{D}_1\setminus\mathscr{D}|_\gamma\right)^2}\le\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

olduğu kolay bir şekilde hesaplanabilir. Diğer taraftan, her bir $x\in\mathscr{D}$ için $|\mathscr{D}_0|_\gamma=2|\mathscr{D}|_\gamma$ olacak şekilde bir $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_0$ yuvarı vardır. Bu durumda, (3.9) ve $|\mathscr{D}_0\setminus\mathscr{D}|_\gamma=|\mathscr{D}_0\cap\mathscr{D}|_\gamma=|\mathscr{D}|_\gamma$ den dolayı

$$
|\mathscr{D}_0|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_0}\left|\chi_{\mathscr{D}}(x)-(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_0}\right|(x')^\gamma dx=\frac{2|\mathscr{D}_0\cap\mathscr{D}|_\gamma|\mathscr{D}_0\setminus\mathscr{D}|_\gamma}{\left(|\mathscr{D}_0\cap\mathscr{D}|_\gamma+|\mathscr{D}_0\setminus\mathscr{D}|_\gamma\right)^2}\le\frac{1}{2}
$$

yazılabilir. Bu, her $x\in\mathbb{R}^n_{k,+}$ için

$$
\left(M^\sharp_\gamma(\chi_{\mathscr{D}})\,\chi_{\mathscr{D}}\right)(x)=\sup_{x\in\mathscr{D}_1}|\mathscr{D}_1|_\gamma^{-1}\int_{\mathscr{D}_1}\left|\chi_{\mathscr{D}}(y)-(\chi_{\mathscr{D}})_{\mathscr{D}_1}\right|(y')^\gamma dy=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\chi_{\mathscr{D}}(x)
$$

olduğunu gösterir. Dikkat edilmelidir ki, $\chi_{\mathscr{D}}(x) \in L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ dir. (iii) hipotezi ile

$$\begin{aligned}
\left\| \left(b - 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}}) \right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} &= \left\| 2 \left(\frac{1}{2} b\chi_{\mathscr{D}} - M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}}) \right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&= \left\| 2 \left(bM^{\sharp}_{\gamma}(\chi_{\mathscr{D}})\, \chi_{\mathscr{D}} - M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}}) \right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&= \left\| 2 \left(bM^{\sharp}_{\gamma}(\chi_{\mathscr{D}}) - M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}}) \right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq \left\| 2 \left[M^{\sharp}_{\gamma}, b \right] (\chi_{\mathscr{D}}) \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A \left\| \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

<u>$(iv) \Rightarrow (i)$.</u> Her $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ için

$$|b_{\mathscr{D}}| \leq 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}})(x), \quad x \in \mathscr{D} \tag{3.10}$$

eşitsizliği Bastero, Milman and Ruiz (Bastero vd., 2000) tarafından elde edilmiştir. Şimdi, $b \in BMO_{\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ sonucunu elde edebiliriz. Gerçekten, $X = \{x \in \mathscr{D} : b(x) \leq b_{\mathscr{D}}\}$ ve $Y = \{x \in \mathscr{D} : b(x) > b_{\mathscr{D}}\}$ olsun. Bu durumda,

$$\int_X |b(x) - b_{\mathscr{D}}| \, (x')^{\gamma} dx = \int_Y |b(x) - b_{\mathscr{D}}| \, (x')^{\gamma} dx$$

yazılabilir. Her $x \in X$ için $b(x) \leq b_{\mathscr{D}} \leq |b_{\mathscr{D}}| \leq 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}})(x)$ olduğundan

$$|b(x) - b_{\mathscr{D}}| \leq \left| b(x) - 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}})(x) \right|, \quad x \in X$$

yazılabilir. Lemma 2.5.3, Lemma 3.0.3 ve (iv) hipotezinden

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}} |b(x) - b_{\mathscr{D}}| \, (x')^{\gamma} dx &= |\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \int_{X \cup Y} |b(x) - b_{\mathscr{D}}| \, (x')^{\gamma} dx \\
&= 2|\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \int_X |b(x) - b_{\mathscr{D}}| \, (x')^{\gamma} dx \\
&\leq 2|\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \int_X \left| b(x) - 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}})(x) \right| (x')^{\gamma} dx \\
&\leq 2|\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \int_{\mathscr{D}} \left| b(x) - 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}})(x) \right| (x')^{\gamma} dx \\
&\leq A|\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \left\| \left(b - 2M^{\sharp}_{\gamma}(b\chi_{\mathscr{D}}) \right) \chi_{\mathscr{D}} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A|\mathscr{D}|^{-1}_{\gamma} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_{\mathscr{D}}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A
\end{aligned}$$

elde edilir, bu ise $b \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğunu gösterir.

Şimdi, $b^- \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ olduğunu gösterelim. (3.10) ile

$$2M^\sharp_\gamma(b\chi_\mathscr{D})(x) - b(x) \geq |b_\mathscr{D} - b(x)| = |b_\mathscr{D}| - b^+(x) + -b^-(x), \quad x \in \mathscr{D}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} \left| 2M^\sharp_\gamma(b\chi_\mathscr{D})(x) \right| (x')^\gamma dx &\geq |\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} \left(2M^\sharp_\gamma(b\chi_\mathscr{D})(x) \right) (x')^\gamma dx \\
&\geq |\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} \left(|b_\mathscr{D}| - b^+(x) + -b^-(x) \right) \\
&= |b_\mathscr{D}| - |\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} b^+(x)(x')^\gamma dx + |\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} b^-(x)(x')^\gamma dx
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 2.5.3, Lemma 3.0.3 ve (iv) hipotezi uygulanarak, (3.8) a benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} \left| 2M^\sharp_\gamma(b\chi_\mathscr{D})(x) \right| (x')^\gamma dx &\leq A|\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \left\| \left(2M^\sharp_\gamma(b\chi_\mathscr{D})(x) - b(x) \right) \chi_\mathscr{D} \right\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_\mathscr{D}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A|\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \|\chi_\mathscr{D}\|_{L_{p(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \|\chi_\mathscr{D}\|_{L_{p'(\cdot),\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \\
&\leq A
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu, (3.11) ile birlikte

$$|b_\mathscr{D}| - |\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} b^+(x)(x')^\gamma dx + |\mathscr{D}|^{-1}_\gamma \int_\mathscr{D} b^-(x)(x')^\gamma dx \leq A$$

olduğunu gösterir. $x \in \mathscr{D}$ olmak üzere $|\mathscr{D}|_\gamma \to 0$ olsun. Lebesgue diferensiyelleme teoremi yardımıyla

$$A \geq \left| b(x) - b^+(x) + b^-(x) \right| = 2b^-(x) = 2\left| b^-(x) \right|$$

elde edilir ve istenilen sonuca ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. ■

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tezde, değişken üslü Lebesgue uzaylarında B-maksimal operatörlerin komütatörlerinin sınırlılık özellikleri incelenmiştir. Özellikle Laplace-Bessel diferensiyel operatörü ile ilişkili B-maksimal ve sharp B-maksimal operatörlerin komütatörleri ele alınarak, literatürdeki boşluk giderilmeye çalışılmıştır.

Elde edilen sonuçlar, değişken üslü fonksiyon uzaylarında komütatörlerin sınırlılığının yalnızca BMO_γ özelliklerine değil, aynı zamanda üs fonksiyonunun log-Hölder sürekliliğine de bağlı olduğunu göstermektedir. Bu sonuç, değişken üslü Lebesgue uzaylarının klasik $L_{p,\gamma}$ uzaylarından temel farkını vurgulamakta ve operatör teorisinin esnekliğini artırmaktadır.

Çalışma, klasik komütatör teorisinin modern ve daha genel bir çerçevede genişletilebileceğini ortaya koymaktadır. Maksimal operatörler, Laplace-Bessel tipi diferensiyel operatörler ve ilgili komütatörler üzerinde elde edilen sınırlılık sonuçları, harmonik analiz, kısmi diferensiyel denklemler ve uygulamalı matematik alanlarında yeni yöntemlerin geliştirilmesine temel teşkil etmektedir. Sonuç olarak, bu çalışma, değişken üslü uzaylarda komütatör teorisinin kapsamını genişleterek, harmonik analiz ve PDE uygulamaları açısından yeni bakış açıları sunmaktadır.

KAYNAKÇA

Ağcayazı, M. & Gogatishvili, A. & Mustafayev, R. (2018). Weak-type estimates in Morrey spaces for maximal commutator and commutator of maximal function, *Tokyo Journal of Mathematics, 41*(1), 193–218.

Ağcayazı, M. & Zhang, P. (2023). Commutators of the maximal functions on Banach function spaces, *Bull. Korean Math. Soc., 60*(5), 1391–1408.

Bastero, J. & Milman, M. & Ruiz, F. J. (2000). Commutators for the maximal and sharp functions, *Proc. Amer. Math. Soc., 128*(11), 3329–3334.

Chen, T. & Liu, F. (2022). Regularity of commutators of multilinear maximal operators with Lipschitz symbols, *Math. Inequal. Appl, 25*(1), 109–134.

Coifman, R. & Rochberg, R. &Weiss, G. (1976). Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. Math., 103*, 611–635.

Cruz-Uribe, D. & Fiorenza, A. (2013). *Variable Lebesgue spaces. Foundations and Harmonic Analysis.* Birkhauser/Springer, Heidelberg.

Cruz-Uribe, D. & Fiorenza, A. & Martell, J. & Pérez, C. (2006). The boundedness of classical operators on variable L^p spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn.Math., 31*, 239–264.

Cruz-Uribe, D. & Fiorenza, A. & Neugebauer, C. J. (2003). The maximal function on variable L^p spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 28*, 223–238.

Diening, L. (2002). *Theoretical and numerical results for electrorheological fluids.* (Doctoral dissertation, Ph.D. thesis), University of Freiburg, Germany.

Diening, L. (2005). Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces, *Bull. Sci. Math., 129*, 657–700.

Diening, L. (2004). Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$, *Math. Inequal. Appl., 7*(2), 245–253.

Diening, L. & Harjulehto, P. & Hästö, P. & Mizuta, Y. & Shimomura, T. (2009). Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 34*(2), 503–522.

Diening, L. & Harjulehto, P. & Hästö, P. & Ružička, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.

Ekincioğlu, I. & Guliyev, V. S. & Kaya, E. (2020). B_n-maximal operator and B_n-singular integral operators on variable exponent Lebesgue spaces, *Mathematica Slovaca, 70*, 893–902.

Fan, X. & Zhao, D. (2001). On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 263*(2), 424–446.

Guliyev, E. V. (2005). Weighted inequality for singular integrals in Lebesgue spaces, associated with the Laplace-Bessel differential operators, *Proc IMM NAS Azerbaijan, Azerbaijan Dokl Ran., 358*(4), 450–451.

Guliyev, V. S. (2003). On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator, *Math. Inequal. Appl., 6*(2), 317–330.

Izuki, M. (2010). Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization, *Analysis Mathematica, 36*, 33–50.

Izuki, M. (2010). Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent, *Rend. Circ. Mat. Palermo, 59*, 199–213.

Kipriyanov, I. A. (1967). Fourier Bessel transformations and imbedding theorems. *Trudy Math. Inst. Steklov, 89*, 130–213.

Klyuchantsev, M. I. (1970). On singular integrals generated by the generalized shift operator I. *Sibirsk. Math. Zh., 11*, 810–821.

Kováčık, O. & Rákosník, J. (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, *Czechoslovak Math. J., 41*(4), 592–618.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.

Lerner, A. (2005). Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces, *Math. Z., 251*(3), 509–521.

Lerner, A. (2010). On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces, *Trans.Amer. Math. Soc., 362*, 4229–4242.

Levitan, B. M. (1951). Bessel function expansions in series and Fourier integrals, *Uspekhi Mat. Nauk., 42*(2), 102–143.

Levitan, B. M. (1967). Theorem on the argument of an almost periodic function, *Mat. Zametki, 1*(1), 35-44.

Levitan, B. M. (1973). *The Theory of Generalized Translation Operators*. Nauka, Moscow, (Russian).

Liu, F. & Xue, Q. & Yabuta, K. (2022). Sobolev boundedness and continuity for commutators of the local Hardy-Littlewood maximal function, *Annales Fennici Mathematici, 47*(1), 203–235.

Milman, M. & Schonbek, T. (1990). Second order estimates in interpolation theory and applications, *Proc. Amer. Math. Soc., 110*(4), 961–969.

Muckenhoupt, B. (1972). Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Transactions of the American Mathematical Society, 165*, 207–226.

Musielak, J. (1983). *Orlicz spaces and modular spaces, Vol. 1034*. Springer-Velag, Berlin.

Nakano, H. (1950). Modulared semi-ordered linear spaces. Maruzen Company.

Nekvinda, A. (2004). Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, *Math. Inequal. Appl., 7*, 255–265.

Nekvinda, A. (2007). A note on maximal operator on $\ell^{\{p_n\}}$ and $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, *J. Funct. Spaces Appl., 5*(1), 49–88.

Nekvinda, A. (2008). Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent, *J. Math. Anal. Appl., 337*(2), 1345–1365.

Orlicz, W. (1931). Über Konjugierte Exponentenfolgen, *Studia Mathematica, 3*(1), 200–211.

Pick, L. & Ružička, M. (2001). An example of a space Lp(·) on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded, *Expo. Math., 19*, 369–371.

Ružička, M. (2000). Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory (Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics), *Research Institute for Mathematical Sciences Kokyuroku, 1146*, 16–38.

Segovia, C. & Torrea, J. L. (1989). Vector-valued commutators and applications, *Indiana Univ. Math. J., 38*, 959–971.

Sharapudinov, I. I. (2012). Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent, *Itogi Nauki. Yug Rossii. Mat. Monograf, 5*, 267.

Stein, E.M. (1993). *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, Princeton, N. J.

Xu, J. S. (2007). The boundedness of multilinear commutators of singular integrals on Lebesgue spaces with variable exponent, *Czechoslovak Math. J., 57*(132), 13–27.

Zhang, P. & Fan, D. (2025). Bloom-type two-weight inequalities for commutators of maximal functions. *Analysis and Geometry in Metric Spaces, 13*(1), 20250020.

Zhang, P. & Wu, J. (2014). Commutators of the fractional maximal function on variable exponent Lebesgue spaces, *Czechoslovak Math. J., 64*(139), 183–197.

Zhang, P. & Wu, J. (2014). Commutators for the maximal functions on Lebesgue spaces with variable exponent, *Math. Inequal. Appl., 17*(4), 1375–1386.

Zhikov, V. V. (1987). Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, *Mathematics of the USSR-Izvestiya, 29*(1), 33–66.

Zhikov, V. V. (1997). On some variational problems, *Russian J. Math. Phys., 5*(1), 105–116.