



T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**ÖKLİD UZAYINDA ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE VEKTÖREL MOMENTLERİN
YÖNLÜ EĞRİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UĞUR ORUÇ

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. SİDDİKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2026

10773770

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**ÖKLİD UZAYINDA ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE VEKTÖREL MOMENTLERİN
YÖNLÜ EĞRİLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UĞUR ORUÇ

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. SİDDİKA ÖZKALDI KARAKUŞ

BİLECİK, 2026

10773770

BEYAN

"Öklid Uzayında Alternatif Çatıya Göre Vektörel Momentlerin Yönlü Eğrileri" başlıklı yüksek lisans tezimin hazırlık ve yazım aşamasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Faaliyetlerinde Üretken Yapay Zekâ Kullanımına Dair Etik Rehberine uygun olarak tez/dönem projemi hazırladığımı, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel etik kurallarına uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, çalışmamın herhangi bir kısmının başka bir tez/dönem projesi olarak sunulmadığını, aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Uğur ORUÇ

.../.../ 2026

İmza

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın hayata geçirilmesi yolunda, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, her aşamada destek olan danışmanım Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ 'a en derin şükranlarımı sunarım. Sabrı, özverili rehberliği ve değerli eleştirileri için kendisine minnettarım. Gösterdiği anlayış ve kıymetli zamanı için teşekkürlerimi sunuyorum.

Hayatımın her anında olduğu gibi bu süreçte de sonsuz sevgisi, sabrı ve moral desteği ile yanımda olan, her koşulda en büyük gücüm olan sevgili eşim Tuğba Nur 'a ve varlığıyla her daim huzur ve ilham kaynağım olan, sevgili anneme şükranlarımı sunarım. Onların sevgisi ve desteği olmasaydı, bu yolculuk bu kadar anlamlı olamazdı.

Araştırma sürecinde birçok konuda yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Murat TURAN'a içten teşekkürlerimi iletirim.

Saygılarımla...

Uğur ORUÇ

2026

ÖZET

Bu çalışma, üç boyutlu Öklid uzayındaki eğrileri analiz etmek için alternatif bir geometrik çatı sunmaktadır. Alternatif çatı vektörleri cümlesi oluşturulup, bunlara karşılık gelen türev ilişkileri incelenerek, uzay eğrilerinin diferansiyel geometrisine yeni bir bakış açısı getirilmiştir. Bu çatı vektörleri ve özel olarak tanımlanmış bir Darboux vektörü kullanılarak orijinal eğriyle ilişkili yönlü vektörel moment eğrileri elde edilmiştir. Bu çalışmanın temel katkısı, alternatif çatı yapısı içinde bu vektörel momentlere karşılık gelen dual yönlü eğrilerin tanımlanması ve karakterizasyonudur. Bu yaklaşım, uzay eğrilerinin özelliklerine yeni bakış açıları sunarak teorik ve uygulamalı geometrideki çalışmalar için mevcut analitik araçları genişletir.

Anahtar Kelimeler: Alternatif çatı, genel helis, vektörel moment, yön eğrileri.

ABSTRACT

This study introduces an alternative geometric framework for analyzing curves in three dimensional Euclidean space. By constructing a set of alternative frame vectors and examining their corresponding derivative relations, a new perspective on the differential geometry of space curves is developed. Utilizing these frame vectors and a specifically defined Darboux vector, the directional vectorial moment curves associated with the original curve are derived. A key contribution of this work is the identification and characterization of the dual directed curves corresponding to these vectorial moments within the alternative frame structure. This approach offers new insights into the intrinsic properties of space curves and broadens the analytical tools available for applications in theoretical and applied geometry.

Keywords: Alternative frame, direction curves, general helix, vectorial moment.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. ÖKLİD UZAYINDA ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE VEKTÖREL MOMENT- LERİN YÖNLÜ EĞRİLERİ.....	8
4. SONUÇ.....	27
KAYNAKÇA.....	28

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Alternatif çatı	4
Şekil 2.2. Darboux vektörü	6
Şekil 2.3. α_1 eğrisinin vektörel momenti	7
Şekil 3.1. Helis ve moment eğrileri	25

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

- E^3 : 3-boyutlu Öklid uzayı
 D : Alternatif Darboux vektörü
 N : Aslinormal vektör
 B : Binormal vektör
 W : Birim Darboux vektör
 τ : Burulma
 κ : Eğrilik
 $\|\cdot\|$: Norm
 T : Teğet vektör
 \wedge : Vektörel çarpım
 C : $W \wedge N$ -birim vektör
 ψ_1 : $\int(\alpha \wedge N)ds$ yönlü vektörel moment eğrisi
 ψ_2 : $\int(\alpha \wedge C)ds$ yönlü vektörel moment eğrisi
 ψ_3 : $\int(\alpha \wedge W)ds$ yönlü vektörel moment eğrisi
 ψ_4 : $\int(\alpha \wedge D)ds$ yönlü vektörel moment eğrisi

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride özellikle üç boyutlu Öklid uzayı \mathbb{E}^3 'teki eğrilerin incelenmesi, uzay eğrilerinin geometrik ve kinematik özelliklerinin anlaşılmasında önemli bir rol oynar. Bu alandaki temel yaklaşımlardan biri, bir eğri parametresine (genellikle yay uzunluğu) göre değişen eğrinin konum vektörünün vektörel moment eğrisi olarak bilinen bir eğriyi nasıl oluşturduğunu incelemektir. Bu kavram; orijinal eğrinin, vektörün bir nokta veya eksene göre momentinden türetilen yeni tanımlanmış bir eğrinin geometrisini nasıl etkilediğini araştırır. Vektörel moment eğrileri, yalnızca mühendislikteki statik ve dinamik analizlerde değil; aynı zamanda fizik, matematik ve bilgisayar destekli tasarım gibi çeşitli alanlarda da önemli bir rol oynar. Fizikte bu eğriler, dönme hareketini modellemek ve moment dengesini korumak için önemlidir. Geometrik açıdan bakıldığında kuvvet uygulama noktaları ile dönme eksenleri arasındaki ilişkilerin görselleştirilmesine ve analiz edilmesine yardımcı olurlar. Bilgisayar destekli mühendislik yazılımlarında ise bu eğriler; burulma, eğilme ve dönme gibi yapısal tepkilerin önceden simülasyonunu sağlayarak daha hassas malzeme optimizasyona ve güvenlik analizine olanak tanır. Ayrıca robotik kol hareketlerinden köprü tasarımına kadar uzanan uygulamalarda, moment vektörlerinin yönsel etkileri dikkate alınarak daha işlevsel ve dengeli sistemler oluşturulur. Bu sayede, vektörel moment eğrileri yalnızca teorik yapılar olarak değil, aynı zamanda tasarım ve analiz süreçlerine doğrudan katkıda bulunan disiplinlerarası araçlar olarak da işlev görür.

Son yıllarda araştırmacılar tarafından; bu fikri bir eğrinin hareketli çatılarına, özellikle de Frenet çatısına genişletilmiştir (Tuncer, 2017). Yazar; belirli bir uzay eğrisinin teğet (T), asli normal (N) ve binormal (B) Frenet vektörleriyle ilişkili vektörel moment eğrilerini incelemiştir. Bu çatı vektörlerine moment işlemleri uygulanarak yeni eğriler tanımlanmış ve bunların Frenet elemanları (eğrilik ve burulma dahil) hesaplanmıştır. Bu yöntem, orijinal eğrinin gelişimindeki ek geometrik yapıları ortaya çıkarmıştır.

Bu temele dayanarak asli normal vektör N , birim Darboux vektörü W ve N ile W 'nin çarpımı olarak tanımlanan birim vektör C 'den oluşturulmuş alternatif ortogonal çatı sunulmuştur (Kaya ve Önder, 2017). Bu çatı, uzay eğrilerini analiz etmek için yeni bir bakış açısı sunarak özellikle orijinal çatının işlevselliğini kaybettiği veya daha az bilgilendirici hale geldiği durumlarda, klasik Frenet-Serret çatısına bir alternatif sunmuştur.

Geometride iyi bilinen eğrilerden biri olan helis eğrisi, çeşitli çatılar altında incelenmiştir (Barros, 1997; Çiftçi, 2009). Farklı çatılar ve uzaylar arasındaki ilişkili eğriler, çeşitli çalışmalarda araştırılmıştır (Choi ve Kim, 2012; Deshmukh vd., 2018; Körpınar vd., 2013; Nurkan vd., 2019; Yılmaz, 2015). Vektörel moment eğrileri üzerine çeşitli çalışmalar gerçekleştirilmiştir (Karagöz, 2024; Kaya ve Güven, 2023; Şenyurt vd., 2020). Eğriler üzerine farklı çalışmalarda yürütmüştür (Millman ve Parker, 1977; Struik, 1988).

Bu çalışmada, yapılan araştırmaları bir adım öteye taşınmak istenmiştir. Öncelikle klasik Frenet çatısından değil, alternatif ortogonal çatı vektörlerinden (Kaya ve Önder, 2017) türetilen

yönlü vektörel moment eğrilerinin integrali alınarak oluşturulan integral eğrilerinin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve burulmaları hesaplanmıştır. Bu N , W ve C vektörlerine uygulanan moment işlemleriyle yeni eğriler türetilmiş ve ardından geometrik özellikler Frenet formülleri aracılığıyla ayrıntılı olarak analiz edilmiştir.

Daha sonra, bu yeni oluşturulan moment eğrilerinin her biri için karşılık gelen alternatif çatı vektörleri oluşturulmuştur. Bu, orijinal çatının alternatif geometrik davranışının vektörel moment dönüşümü boyunca nasıl yayıldığını izlememizi sağlamıştır.

Son olarak, elde edilen bu integral eğrilerinden dual yönlü eğriler inşa edilmiştir. İntegral eğrileri, özellikle kinematik ve vida teorisinde, uzaysal olayları analiz etmek için güçlü bir cebirsel araç sağlar. Buradaki uygulama, eğri dinamiklerinin vektörel dönüşümler altında nasıl geliştiğine dair daha kapsamlı bir anlayış sunmuştur.

Bu tezde, yönlü vektörel moment ve alternatif çatı kavramları bir araya getirilerek, \mathbb{E}^3 'teki eğrilerin geometrik çalışmasını zenginleştirmek, hem teorik hem de uygulamalı alanlarda daha kapsamlı araştırmalar için bir platform sunulması amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = (a, b)$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow E^n \\ s &\longrightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s)) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda, $\alpha(I) \subset E^n$ alt cümlesine E^n de diferansiyellenebilir bir eğri ve $s \in I$ ya parametre denir (Yüce, 2020).

Tanım 2.2. E^3 uzayında bir M eğrisi (I, α) komşuluğu ile verilsin. $s \in I$, M eğrisinin yay-parametresi olmak üzere;

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|, \quad \tau(s) = - \langle N(s), B'(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan vektörlere sırasıyla α eğrisinin teğet vektörü, asli normal vektörü, binormal vektörü, eğrilik ve burulma fonksiyonları denir. Ayrıca $\{T, N, B\}$ çatısına α eğrisinin Frenet çatısı denir (Yüce, 2020).

Tanım 2.3. $\alpha : I \longrightarrow E^3$ bir regüler eğri ve $\kappa \neq 0$ olsun. T, N, B, κ, τ Frenet elemanları;

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \quad N(s) = B(s) \wedge T(s), \quad B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|},$$

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Yüce, 2020).

Tanım 2.4. α eğrisinin Frenet vektörleri s parametresine bağlı olarak dönme hareketleri yapar. Bu eksen üzerinde bulunan bir vektör \bar{W} ile gösterilirse

$$T' = \bar{W} \wedge T, \quad N' = \bar{W} \wedge N, \quad B' = \bar{W} \wedge B \tag{D.1}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan Darboux vektörü \bar{W} :

$$\bar{W} = \tau T + \kappa B$$

şekilde tanımlanır. Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$; eğrilik ve burulma, κ, τ olmak üzere birim Dar-

boux vektörü

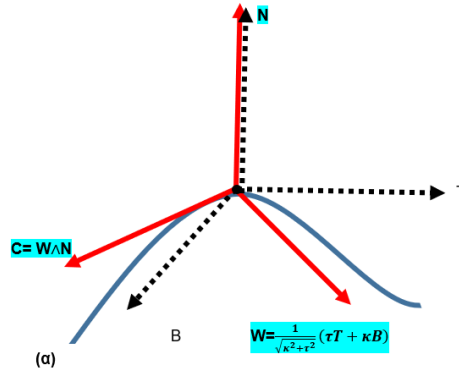
$$W = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B$$

şeklinde tanımlanır (Gray, 1997).

α eğrisinin asli normal vektörü N , birim vektör W ile vektörel olarak çarpılırsa C birim vektörü

$$C = W \wedge N = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B$$

şeklinde elde edilir. Burada elde edilen $\{N, C, W\}$ çatısına alternatif çatı denir (Kaya ve Önder, 2017).



Şekil 2.1: Alternatif çatı

Alternatif çatı ile Frenet çatısı arasındaki ilişki,

$$C = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B, \quad W = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B$$

şeklinde dir. Bu iki eşitlik yardımıyla

$$T = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}C + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}W, \quad B = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}C + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}W$$

eşitlikleri elde edilebilir. Burada;

$$\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\beta}, \quad \gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

denirse, aşağıdaki eşitlikler

$$\begin{cases} C = -\bar{\kappa}T + \bar{\tau}B \\ W = -\bar{\tau}T + \bar{\kappa}B \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} T = -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W \\ B = -\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W \end{cases}$$

elde edilir (Şenyurt, 2018).

Teorem 2.1. $\{N, C, W\}$ alternatif çatı vektörleri ile alternatif çatı vektörlerinin türevleri arasındaki ilişki:

$$N' = \beta C, \quad C' = -\beta N + \gamma W, \quad W' = -\gamma C$$

şeklinde verilir. Bu eşitlikler matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} N' \\ C' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ C \\ W \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir (Kaya ve Önder, 2017).

Teorem 2.2. α eğrisinin alternatif çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ olsun. Bu α eğrisinin alternatif Darboux vektörü:

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W$$

şeklindedir (Şenyurt, 2018).

İspat. N, C, W vektörleri ile \bar{D} Darboux vektörü arasında

$$\bar{D} = aN + bC + cW$$

eşitliği yazılabilir. \bar{D} ile N 'nin vektörel çarpımı (D.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} N' &= \bar{D} \wedge N, \\ \Rightarrow \beta C &= (aN + bC + cW) \wedge N, \\ \Rightarrow \beta C &= cC - bW \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $b = 0$ ve $c = \beta$ elde edilir. \bar{D} ile C 'nin vektörel çarpımı (D.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} C' &= \bar{D} \wedge C, \\ \Rightarrow -\beta N + \gamma W &= (aN + bC + cW) \wedge C, \\ \Rightarrow -\beta N + \gamma W &= -cN + aW \end{aligned}$$

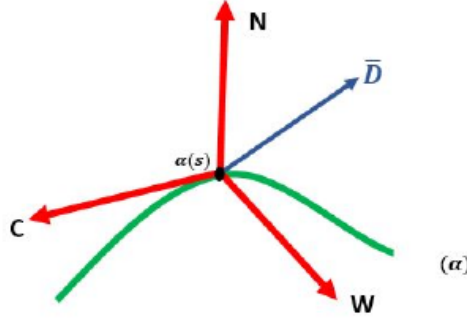
elde edilir. Buradan $a = \gamma$ ve $c = \beta$ elde edilir. \bar{D} ile W 'nin vektörel çarpımı (D.1) yardımıyla

$$\begin{aligned} W' &= \bar{D} \wedge W, \\ \Rightarrow -\gamma C &= (aN + bC + cW) \wedge W, \\ \Rightarrow -\gamma C &= -aC - bW \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a = \gamma$ ve $b = 0$ elde edilir. Bununun bu değerler yerine yazılırsa

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W$$

eşitliği elde edilir. ■



Şekil 2.2: Darboux vektörleri

Tanım 2.5. Birim hızlı α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s)\}$ olduğunu varsayalım. Bu durum şu şekilde ifade edilebilir:

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s) \text{ (Şardağ, 2019).}$$

Yukarıdaki ifadenin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha' &= f'N + fN' + g'C + gC' + h'W + hW', \\ -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W &= f'N + f\beta C + g'C + g(-\beta N + \gamma W) + h'W + h(-\gamma C), \\ -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W &= (f' - g\beta)N + (g' + f\beta - h\gamma)C + (h' + g\gamma)W \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$f' - g\beta = 0, \quad g' + f\beta - h\gamma = -\bar{\kappa} \quad \text{ve} \quad h' + g\gamma = \bar{\tau}$$

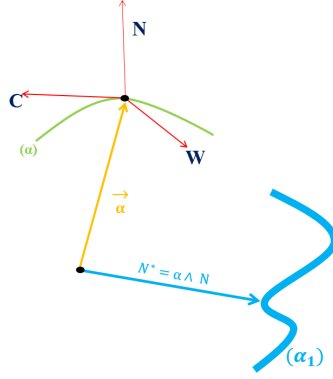
eşitlikleri elde edilir. f' , g' ve h' arasında

$$\begin{aligned} f' &= g\beta, \\ g' &= h\gamma - f\beta - \bar{\kappa}, \\ h' &= \bar{\tau} - g\gamma \end{aligned}$$

şeklinde ilişkiler vardır.

Tanım 2.6. Birim hızlı regüler bir α eğrisinin alternatif çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ olsun. Asli normal vektör N 'nin vektör momenti tarafından oluşturulan eğri, $N^* = \alpha \wedge N$ olarak tanımlanır ve aşağıdaki ilişki ile verilir,

$$\alpha_1(s) = h(s)C(s) - g(s)W(s) \text{ (Şardağ, 2019).}$$



Şekil 2.3: α_1 eğrisinin vektörel momenti

Tanım 2.7. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$ eğrisi verilsin. $X \in \chi(E^n)$ olmak üzere $\frac{d\alpha}{ds} = X(\alpha(s)) = X_{\alpha(s)}$ ise $\alpha(s)$ eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir. Burada $\alpha(s) = \int X ds$ şeklindedir (Yüce, 2020).

3. ÖKLİD UZAYINDA ALTERNATİF ÇATIYA GÖRE VEKTÖREL MOMENTLERİN YÖNLÜ EĞRİLERİ

Bu bölümde, E^3 'te N - dual yönlü eğri, C - dual yönlü eğri, W - dual yönlü eğri ve D - dual yönlü eğri tanımlanarak bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 3.1. α , sıfırdan farklı eğriliğe ve burulmaya sahip, s yay uzunluğu parametreliliği regüler bir eğri olsun. Eğer α 'nın alternatif çatısı $\{N, C, W\}$ ise α 'nın yay uzunluğu parametresi s^* olan N - dual yönlü eğrisi

$$\psi_1(s^*) = \int_{s_0^*}^{s^*} (\alpha(s) \wedge N(s)) ds^* \quad (D.2)$$

şekilde tanımlanır.

$\psi_1(s^*)$ 'nin α 'nın N - dual yönlü eğrisi olduğunu varsayalım. ψ_1 'in Frenet vektör alanlarını, eğriliğini ve burulmasını hesaplayalım.

Teorem 3.1. $\alpha(s)$, \mathbb{E}^3 'te birim hıza sahip regüler bir eğri olsun. $\{N, C, W\}$, α 'nın alternatif çatısı ve $\psi_1(s^*)$, α 'nın N - dual yönlü eğrisi olsun. Bu durumda, $\psi_1(s^*)$ 'nin Frenet vektör alanları, eğriliği ve burulması:

$$T_{\psi_1} = \frac{hC - gW}{\sqrt{h^2 + g^2}},$$

$$N_{\psi_1} = \frac{-h\beta(g^2 + h^2)N + g[g\bar{\tau} + h(f\beta + \bar{\kappa})]C + h[g\bar{\tau} + h(f\beta + \bar{\kappa})]W}{\sqrt{(g^2 + h^2)\{h^2\beta^2(g^2 + h^2) + [g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta)]^2\}}},$$

$$B_{\psi_1} = \frac{(g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))N + gh\beta C + h^2\beta W}{\sqrt{h^2\beta^2(g^2 + h^2) + (g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2}},$$

$$\kappa_{\psi_1} = \frac{\sigma_1 \sqrt{h^2\beta^2(g^2 + h^2) + (g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2}}{(\sqrt{h^2 + g^2})^3},$$

$$\tau_{\psi_1} = \frac{\sigma_1 h\beta[h(f\beta)' - gh\beta^2 - fg\beta\gamma] - \sigma_1(fh\beta + h\bar{\kappa} + g\bar{\tau})(\tau + h\beta)'}{[(g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (gh\beta)^2 + (h^2\beta)^2]}$$

şeklindedir.

İspat. α , s yay uzunluğu parametreliliği bir eğri ve ψ_1 , s^* yay uzunluğu parametreliliği bir eğri olduğunu varsayalım. Ayrıca α 'nın alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \kappa, \tau\}$ ve ψ_1 'in Frenet çatı

elemanları $\{T_{\psi_1}, N_{\psi_1}, B_{\psi_1}, \kappa_{\psi_1}, \tau_{\psi_1}\}$ 'dır.

Bu denklemde s^* 'ye göre (D.2) cinsinden türev alınırsa:

$$\begin{aligned}
\psi_1'(s^*) &= \alpha(s) \wedge N(s) \\
&= (f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s)) \wedge (N(s)) \\
&= f(s) \underbrace{(N(s) \wedge N(s))}_0 + g(s) \underbrace{(C(s) \wedge N(s))}_{-W(s)} + f \underbrace{(W(s) \wedge N(s))}_{C(s)} \\
&= h(s)C(s) - g(s)W(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin tekrar s^* 'a göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi_1''(s^*) &= \frac{d\psi_1'(s)}{ds^*} \\
&= \frac{d\psi_1'(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\
&= h'C + hC' - g'W - gW' \\
&= (\bar{\tau} - g\gamma)C + h(-\beta N + \gamma W) - (h\gamma - f\beta - \bar{\kappa})W + g\gamma C \\
&= (-h\gamma N + \bar{\tau}C + (f\beta + \bar{\kappa})W)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{ds}{ds^*} = \sigma_1$ denirse

$$\psi_1''(s^*) = \sigma_1(-h\beta N + \bar{\tau}C + (\bar{\kappa} + f\beta)W)$$

elde edilir. Burada norm alınırsa

$$\sigma_1 = \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{(h\beta)^2 + (\bar{\tau}^2) + (\bar{\kappa} + f\beta)^2}},$$

$$\psi_1''(s^*) = \frac{-h\beta N + \bar{\tau}C + (\bar{\kappa} + f\beta)W}{\sqrt{(h\beta)^2 + (\bar{\tau}^2) + (\bar{\kappa} + f\beta)^2}}$$

elde edilir. Üçüncü türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi_1'''(s^*) &= \frac{d\psi_1''(s)}{ds^*} \\
&= \frac{d\psi_1''(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\
&= \sigma_1'(-h\beta N + \bar{\tau}C + (f\beta + \bar{\kappa})W) - \sigma_1((h\beta)'N - (h\beta)N' + (\bar{\tau})'C \\
&\quad + \bar{\tau}C' + (f\beta + \bar{\kappa})'W + (f\beta + \bar{\kappa})W') \\
&= (-\sigma_1'(h\beta) - \sigma_1(h\beta)' - \sigma_1\beta\bar{\tau})N + (\sigma_1'\bar{\tau} - \sigma_1h\beta^2 + \sigma_1\bar{\tau}' - \sigma_1\gamma(f\beta + \bar{\kappa}))C \\
&\quad + (\sigma_1'(f\beta + \bar{\kappa}) + \sigma_1(f\beta + \bar{\kappa})')W.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \psi_1'''(s^*) &= \sigma_1 \begin{pmatrix} (-\sigma_1'(h\beta) - \sigma_1(h\beta)' - \sigma_1\beta\bar{\tau})N \\ +(\sigma_1'\bar{\tau} - \sigma_1h\beta^2 + \sigma_1\bar{\tau}' - \sigma_1\gamma(f\beta + \bar{\kappa}))C \\ +(\sigma_1'(f\beta + \bar{\kappa}) + \sigma_1(f\beta + \bar{\kappa})')W \end{pmatrix} \\
&= P_1N + R_1C + S_1W
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\sigma_1^2\bar{\tau} - \sigma_1h\beta\sigma_1' - \sigma_1^2(h\beta)', \\
R_1 &= -\sigma_1^2h\beta^2 - \sigma_1^2\gamma f\beta + \sigma_1\bar{\tau}\sigma_1', \\
S_1 &= \sigma_1^2(f\beta)' + \sigma_1\bar{\kappa}\sigma_1' + \sigma_1f\beta\sigma_1'
\end{aligned}$$

dir. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
\psi_1'(s^*) &= hC - gW, \\
\Rightarrow \|\psi_1'(s^*)\| &= \sqrt{g^2 + h^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\psi_1'(s^*) \wedge \psi_1''(s^*) &= (hC - gW) \wedge (\sigma_1(-h\beta N + \bar{\tau}C + (f\beta + \bar{\kappa})W)) \\
&= -\sigma_1h^2\beta(C \wedge N) + \sigma_1h\bar{\tau}(C \wedge C) + \sigma_1h(f\beta + \bar{\kappa})(C \wedge W) \\
&\quad + \sigma_1gh\beta(W \wedge N) - \sigma_1g\bar{\tau}(W \wedge C) - \sigma_1g(f\beta + \bar{\kappa})(W \wedge W) \\
&= (\sigma_1g\bar{\tau} + \sigma_1h(f\beta + \bar{\kappa}))N + \sigma_1gh\beta C + \sigma_1h^2\beta W.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|\psi_1'(s^*) \wedge \psi_1''(s^*)\| &= \sqrt{(\sigma_1g\bar{\tau} + \sigma_1h(f\beta + \bar{\kappa}))^2 + (\sigma_1gh\beta)^2 + (\sigma_1h^2\beta)^2} \\
&= \sigma_1\sqrt{(g\bar{\tau} + h(f\beta + \bar{\kappa}))^2 + h^2\beta^2(g^2 + h^2)}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\det(\psi'_1, \psi''_1, \psi'''_1) &= \begin{vmatrix} 0 & h & -g \\ -\sigma_1 h \beta & \sigma_1 \bar{\tau} & \sigma_1 (f\beta + \bar{\kappa}) \\ P_1 & R_1 & S_1 \end{vmatrix} \\
&= \sigma_1 h (f\beta + \bar{\kappa}) P_1 + \sigma_1 g h \beta R_1 + \sigma_1 g \bar{\tau} P_1 + \sigma_1 h^2 \beta S_1 \\
&= \sigma_1 h^2 \beta \sigma_1^2 (f\beta)' + \sigma_1 h^2 \beta \sigma_1 \sigma_1' \bar{\kappa} + \sigma_1 \sigma_1' f \beta \sigma_1 h^2 \beta - \sigma_1 g h \beta \sigma_1^2 h \beta^2 - \sigma_1 g h \beta \sigma_1^2 \gamma f \beta \\
&\quad + \sigma_1 g h \beta \sigma_1 \bar{\tau} \sigma_1' - \sigma_1 h (f\beta + \bar{\kappa}) \sigma_1^2 \tau - \sigma_1 h (f\beta + \bar{\kappa}) \sigma_1 h \beta \sigma_1' - \sigma_1 h (f\beta + \bar{\kappa}) \sigma_1^2 (h\beta)' \\
&\quad - \sigma_1 g \bar{\tau} \sigma_1^2 \tau - \sigma_1 g \bar{\tau} \sigma_1 h \beta \sigma_1' - \sigma_1 g \bar{\tau} \sigma_1^2 (h\beta)' \\
&= \sigma_1^3 h^2 \beta (f\beta)' + \sigma_1^2 h^2 \beta \bar{\kappa} \sigma_1' + \sigma_1^2 f h^2 \beta^2 \sigma_1' - \sigma_1^3 g h^2 \beta^3 - \sigma_1^3 f g h \beta^2 \gamma \\
&\quad + \sigma_1^2 g h \beta \bar{\tau} \sigma_1' - \sigma_1^3 h (f\beta + \bar{\kappa}) \tau - \sigma_1^2 h^2 \beta (f\beta + \bar{\kappa}) \sigma_1' - \sigma_1^3 h (f\beta + \bar{\kappa}) (h\beta)' \\
&\quad - \sigma_1^3 g \bar{\tau} \tau - \sigma_1^2 g h \beta \bar{\tau} \sigma_1' - \sigma_1^3 g \bar{\tau} (h\beta)' \\
&= \sigma_1^3 h^2 \beta (f\beta)' - \sigma_1^3 g h^2 \beta^3 - \sigma_1^3 f g h \beta^2 \gamma - \sigma_1^3 h (f\beta + \bar{\kappa}) \tau - \sigma_1^3 h (f\beta + \bar{\kappa}) (h\beta)' \\
&\quad - \sigma_1^3 g \bar{\tau} \tau - \sigma_1^3 g \bar{\tau} (h\beta)' \\
&= \sigma_1^3 (h(f\beta)' - g h \beta^2 - f g \beta \gamma) - \sigma_1^3 (h\beta)' (h f \beta + h \bar{\kappa} + g \bar{\tau}) - \sigma_1^3 \tau (h f \beta + h \bar{\kappa} + g \bar{\tau}) \\
&= \sigma_1^3 h \beta (h(f\beta)' - g h \beta^2 - f g \beta \gamma) - \sigma_1^3 (f h \beta + h \bar{\kappa} + g \bar{\tau}) (\tau + h \beta)'
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler kullanılarak

$$T_{\psi_1} = \frac{\psi'_1}{\|\psi'_1\|} = \frac{hC - gW}{\sqrt{h^2 + g^2}},$$

$$N_{\psi_1} = B_{\psi_1} \wedge T_{\psi_1} = \frac{-h\beta(g^2 + h^2)N + g(g\bar{\tau} + h(f\beta + \bar{\kappa}))C + h(g\bar{\tau} + h(f\beta + \bar{\kappa}))W}{\sqrt{(g^2 + h^2)(h^2\beta^2(g^2 + h^2) + (g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2)},$$

$$B_{\psi_1} = \frac{\psi'_1 \wedge \psi''_1}{\|\psi'_1 \wedge \psi''_1\|} = \frac{(g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))N + gh\beta C + h^2\beta W}{\sqrt{h^2\beta^2(g^2 + h^2) + (g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2}},$$

$$\kappa_{\psi_1} = \frac{\|\psi'_1 \wedge \psi''_1\|}{\|\psi'_1\|^3} = \frac{\sigma_1 \sqrt{h^2\beta^2(g^2 + h^2) + (g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2}}{(\sqrt{h^2 + g^2})^3},$$

$$\tau_{\psi_1} = \frac{\det(\psi'_1, \psi''_1, \psi'''_1)}{\|\psi'_1 \wedge \psi''_1\|^2} = \frac{\sigma_1 h \beta (h(f\beta)' - g h \beta^2 - f g \beta \gamma) - \sigma_1 (f h \beta + h \bar{\kappa} + g \bar{\tau}) (\tau + h \beta)'}{((g\bar{\tau} + h(\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (gh\beta)^2 + (h^2\beta)^2)}$$

ifadeleri elde edilir. ■

Tanım 3.2. α , sıfırdan farklı eğriliğe ve burulmaya sahip, s yay uzunluğu parametrelili regüler bir eğri olsun. Eğer α 'nın alternatif çatası $\{N, C, W\}$ ise α 'nın yay uzunluğu parametresi s^* olan

C - dual yönlü eğrisi

$$\psi_2(s^*) = \int_{s_0^*}^{s^*} (\alpha(s) \wedge C(s)) ds^* \quad (D.3)$$

şekilde tanımlanır.

$\psi_2(s^*)$ 'nin α 'nın C - dual yönlü eğrisi olduğunu varsayalım. ψ_2 'nin Frenet vektör alanlarını, eğriliğini ve burulmasını hesaplayalım.

Teorem 3.2. $\alpha(s)$, \mathbb{E}^3 'te birim hıza sahip regüler bir eğri olsun. $\{N, C, W\}$, α 'nın alternatif çatısı ve $\psi_2(s^*)$, α 'nın C - dual yönlü eğrisi olsun. O zaman $\psi_2(s^*)$ 'nin Frenet vektör alanları, eğriliği ve burulması:

$$T_{\psi_2} = \frac{-hN + fW}{\sqrt{f^2 + h^2}},$$

$$N_{\psi_2} = \frac{f[gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]N - (h\beta + f\gamma)(f^2 + h^2)C + h[gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]W}{\sqrt{(f^2 + h^2)\{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2\}}},$$

$$B_{\psi_2} = \frac{f(h\beta + f\gamma)N + (hg\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma))C + (h(h\beta + f\gamma))W}{\sqrt{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2}},$$

$$\kappa_{\psi_2} = \frac{\sigma_2 \sqrt{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2}}{(\sqrt{f^2 + h^2})^3},$$

$$\tau_{\psi_2} = \frac{\begin{pmatrix} \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)(g\beta)' - \sigma_2 h\gamma(h\beta + f\gamma)^2 + \sigma_2 f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)' \\ + f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)\sigma_2' + \sigma_2 \beta \bar{\tau}(\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)' \\ - h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)\sigma_2' + \sigma_2 h\beta(h\beta + f\gamma)^2 - \sigma_2 gh\beta(h\beta + f\gamma)' - \sigma_2 gh\beta^2 \bar{\tau} \end{pmatrix}}{\{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2\}}$$

şeklindedir.

İspat. α , s yay uzunluğu parametrelili bir eğri ve ψ_2 , s^* yay uzunluğu parametrelili bir eğri olsun. Ayrıca, α 'nın alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \kappa, \tau\}$ ve ψ_2 'nin Frenet çatı elemanları $\{T_{\psi_2}, N_{\psi_2}, B_{\psi_2}, \kappa_{\psi_2}, \tau_{\psi_2}\}$ 'dir.

Bu denklemde s^* 'ya göre (D.3) cinsinden türev alınırsa:

$$\begin{aligned}
\psi_2'(s^*) &= \alpha(s) \wedge C(s) \\
&= (f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s)) \wedge C(s) \\
&= f(s) \underbrace{(N(s) \wedge C(s))}_W + g(s) \underbrace{(C(s) \wedge C(s))}_0 + f \underbrace{(W(s) \wedge C(s))}_{-N(s)} \\
&= -h(s)N(s) + f(s)W(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin tekrar s^* 'a göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi_2''(s^*) &= \frac{d\psi_2'(s)}{ds^*} \\
&= \frac{d\psi_2'(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\
&= -h'N - hN' + f'W + fW' \\
&= -(\bar{\tau} - g\gamma)N - h\beta C + g\beta W - f\gamma C \\
&= -(\bar{\tau} - g\gamma)N - (h\beta + f\gamma)C + g\beta W
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{ds}{ds^*} = \sigma_2$ denirse

$$\psi_2''(s^*) = \sigma_2(-(\bar{\tau} - g\gamma)N - (h\beta + f\gamma)C + g\beta W)$$

elde edilir. Buradan norm alınırsa

$$\sigma_2 = \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{(\bar{\tau} - g\gamma)^2 + (h\beta + f\gamma)^2 + (g\beta)^2}},$$

$$\psi_2''(s^*) = \frac{-(\bar{\tau} - g\gamma)N - (h\beta + f\gamma)C + g\beta W}{\sqrt{(\bar{\tau} - g\gamma)^2 + (h\beta + f\gamma)^2 + (g\beta)^2}}$$

elde edilir. Üçüncü türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\psi_2'''(s^*) &= \frac{d\psi_2''(s)}{ds^*} \\
&= \frac{d\psi_2''(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\
&= \sigma_2'(-(\bar{\tau} - g\gamma)N - (h\beta + f\gamma)C + g\beta W) \\
&\quad + \sigma_2(-(\bar{\tau} - g\gamma)'N - (\bar{\tau} - g\gamma)N' - (h\beta + f\gamma)'C - (h\beta + f\gamma)C' + (g\beta)'W + g\beta W') \\
&= \sigma_2'(-(\bar{\tau} - g\gamma)N - (h\beta + f\gamma)C + g\beta W) \\
&\quad + \sigma_2(-(\bar{\tau} - g\gamma)'N - (\bar{\tau} - g\gamma)\beta C - (h\beta + f\gamma)'C - (h\beta + f\gamma)(-\beta N + \gamma W) + (g\beta)'W + g\beta(-\gamma C)) \\
&= (-\sigma_2'(\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2(\bar{\tau} - g\gamma)' + \sigma_2\beta(h\beta + f\gamma))N \\
&\quad - (\sigma_2'(h\beta + f\gamma) + \sigma_2(h\beta + f\gamma)' + \sigma_2\beta(\bar{\tau} - g\gamma) + \sigma_2g\beta\gamma)C \\
&\quad + (\sigma_2'(g\beta) + \sigma_2(g\beta)' - \sigma_2\gamma(h\beta + f\gamma))W. \\
\Rightarrow \psi_2'''(s^*) &= \sigma_2 \begin{pmatrix} (-\sigma_2'(\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2(\bar{\tau} - g\gamma)' + \sigma_2\beta(h\beta + f\gamma))N \\ -(\sigma_2'(h\beta + f\gamma) + \sigma_2(h\beta + f\gamma)' + \sigma_2\beta\bar{\tau})C \\ +(\sigma_2'g\beta - \sigma_2\gamma(h\beta + f\gamma) + \sigma_2(g\beta)')W \end{pmatrix} \\
&= P_2N + R_2C + S_2W
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
P_2 &= -\sigma_2\sigma_2'(\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2^2(\bar{\tau} - g\gamma)' + \sigma_2^2\beta(h\beta + f\gamma), \\
R_2 &= -\sigma_2\sigma_2'(h\beta + f\gamma) - \sigma_2^2(h\beta + f\gamma)' - \sigma_2^2\beta\bar{\tau}, \\
S_2 &= \sigma_2\sigma_2'g\beta - \sigma_2^2\gamma(h\beta + f\gamma) + \sigma_2^2(g\beta)'
\end{aligned}$$

dir. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
\psi_2'(s^*) &= -hN + fW, \\
\Rightarrow \|\psi_2'(s^*)\| &= \sqrt{f^2 + h^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\psi_2'(s^*) \wedge \psi_2''(s^*) &= (-hN + fW) \wedge (-\sigma_2(\bar{\tau} - g\gamma)N - \sigma_2(h\beta + f\gamma)C + \sigma_2g\beta W) \\
&= h\sigma_2(\bar{\tau} - g\gamma)(N \wedge N) + h\sigma_2(h\beta + f\gamma)(N \wedge C) - h\sigma_2g\beta(N \wedge W) \\
&\quad - f\sigma_2(\bar{\tau} - g\gamma)(W \wedge N) - f\sigma_2(h\beta + f\gamma)(W \wedge C) + f\sigma_2g\beta(W \wedge W) \\
&= \sigma_2f(h\beta + f\gamma)N + (\sigma_2hg\beta - \sigma_2f(\bar{\tau} - g\gamma))C + \sigma_2h(h\beta + f\gamma)W,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\psi'_2(s^*) \wedge \psi''_2(s^*)\| = \sigma_2 \sqrt{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + h^2) + [hg\beta + f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \det(\psi'_2, \psi''_2, \psi'''_2) &= \begin{vmatrix} -h & 0 & f \\ -\sigma_2(\bar{\tau} - g\gamma) & -\sigma_2(h\beta + f\gamma) & \sigma_2 g\beta \\ P_2 & R_2 & S_2 \end{vmatrix} \\ &= \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)S_2 - \sigma_2 f(\bar{\tau} - g\gamma)R_2 + \sigma_2 f(h\beta + f\gamma)P_2 + \sigma_2 gh\beta R_2 \\ &= \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)\sigma_2 \sigma'_2 g\beta - \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)\sigma_2^2 \gamma(h\beta + f\gamma) + \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)\sigma_2^2 (g\beta)' \\ &\quad + \sigma_2 f(\bar{\tau} - g\gamma)\sigma_2 \sigma'_2 (h\beta + f\gamma) + \sigma_2 f(\bar{\tau} - g\gamma)\sigma_2^2 (h\beta + f\gamma)' + \sigma_2 f(\bar{\tau} - g\gamma)\sigma_2^2 \beta \bar{\tau} \\ &\quad - \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)\sigma_2 \sigma'_2 (\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)\sigma_2^2 (\bar{\tau} - g\gamma)' + \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)\sigma_2^2 \beta (h\beta + f\gamma) \\ &\quad - \sigma_2 gh\beta \sigma_2^2 (h\beta + f\gamma)' - \sigma_2 gh\beta \sigma_2 \sigma'_2 (h\beta + f\gamma) - \sigma_2 gh\beta \sigma_2^2 \beta \bar{\tau} \\ &= \sigma_2^2 gh\beta (h\beta + f\gamma)\sigma'_2 - \sigma_2^3 h\gamma (h\beta + f\gamma)^2 + \sigma_2^3 h(h\beta + f\gamma)(g\beta)' \\ &\quad + \sigma_2^2 f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)\sigma'_2 + \sigma_2^3 f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)' + \sigma_2^3 f\beta \bar{\tau}(\bar{\tau} - g\gamma) \\ &\quad - \sigma_2^2 h(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)\sigma'_2 - \sigma_2^3 h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)' + \sigma_2^3 h\beta (h\beta + f\gamma)^2 \\ &\quad - \sigma_2^3 gh\beta (h\beta + f\gamma)' - \sigma_2^2 gh\beta (h\beta + f\gamma)\sigma'_2 - \sigma_2^3 gh\beta^2 \bar{\tau} \\ &= \sigma_2^3 h(h\beta + f\gamma)(g\beta)' - \sigma_2^3 h\gamma (h\beta + f\gamma)^2 + \sigma_2^3 f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)' \\ &\quad + \sigma_2^2 f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)\sigma'_2 + \sigma_2^3 \beta \bar{\tau}(\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2^3 h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)' \\ &\quad - \sigma_2^2 h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)\sigma'_2 + \sigma_2^3 h\beta (h\beta + f\gamma)^2 - \sigma_2^3 gh\beta (h\beta + f\gamma)' - \sigma_2^3 gh\beta^2 \bar{\tau} \end{aligned}$$

dır. Bu denklemler kullanılarak

$$T_{\psi_2} = \frac{\psi'_{12}}{\|\psi'_2\|} = \frac{-hN + fW}{\sqrt{f^2 + h^2}},$$

$$N_{\psi_2} = B_{\psi_2} \wedge T_{\psi_2} = \frac{f(gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma))N - (h\beta + f\gamma)(f^2 + h^2)C + h(gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma))W}{\sqrt{(f^2 + h^2)((h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + (gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma))^2)},$$

$$B_{\psi_2} = \frac{\psi'_2 \wedge \psi''_2}{\|\psi'_2 \wedge \psi''_2\|} = \frac{f(h\beta + f\gamma)N + (hg\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma))C + (h(h\beta + f\gamma))W}{\sqrt{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [hg\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2}},$$

$$\kappa_{\psi_2} = \frac{\|\psi'_2 \wedge \psi''_2\|}{\|\psi'_2\|^3} = \frac{\sigma_2 \sqrt{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [hg\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2}}{(\sqrt{f^2 + h^2})^3},$$

$$\begin{aligned}\tau_{\psi_2} &= \frac{\det(\psi_2', \psi_2'', \psi_2''')}{\|\psi_2' \wedge \psi_2''\|^2} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)(g\beta)' - \sigma_2 h\gamma(h\beta + f\gamma)^2 + \sigma_2 f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)' \\ + f(\bar{\tau} - g\gamma)(h\beta + f\gamma)\sigma_2' + \sigma_2 \beta \bar{\tau}(\bar{\tau} - g\gamma) - \sigma_2 h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)' \\ - h(h\beta + f\gamma)(\bar{\tau} - g\gamma)\sigma_2' + \sigma_2 h\beta(h\beta + f\gamma)^2 - \sigma_2 gh\beta(h\beta + f\gamma)' - \sigma_2 gh\beta^2 \bar{\tau} \end{pmatrix}}{\{(h\beta + f\gamma)^2(f^2 + g^2) + [gh\beta - f(\bar{\tau} - g\gamma)]^2\}}\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. ■

Tanım 3.3. α ; sıfırdan farklı eğriliğe ve burulmaya sahip, s yay uzunluğu parametrelili regüler bir eğri olsun. Eğer α 'nın alternatif çatisı $\{N, C, W\}$ ise α 'nın yay uzunluğu parametresi s^* olan W - dual yönlü eğrisi

$$\psi_3(s^*) = \int_{s_0^*}^{s^*} (\alpha(s) \wedge W(s)) ds^* \quad (D.4)$$

şekilde tanımlanır.

$\psi_3(s^*)$ 'ün α 'nın W - dual yönlü eğrisi olduğunu varsayalım. ψ_3 'ün Frenet vektör alanlarını, eğriliğini ve burulmasını hesaplayalım.

Teorem 3.3. $\alpha(s)$, \mathbb{E}^3 'te birim hıza sahip regüler bir eğri olsun. $\{N, C, W\}$, α 'nın alternatif çatisı ve $\psi_3(s^*)$, α 'nın W - dual yönlü eğrisi olsun. O zaman $\psi_3(s^*)$ 'nin Frenet vektör alanları, eğriliği ve burulması şu şekilde verilir:

$$T_{\psi_3} = \frac{gN - fC}{\sqrt{f^2 + g^2}},$$

$$N_{\psi_3} = \frac{f(h\gamma - \bar{\kappa})N + g(h\gamma - \bar{\kappa})C - \gamma(f^2 + g^2)W}{\sqrt{(f^2 + g^2)((f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2)}},$$

$$B_{\psi_3} = \frac{f\gamma N + g\gamma C + (h\gamma - \bar{\kappa})W}{\sqrt{(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2}},$$

$$\kappa_{\psi_3} = \frac{\sigma_3 f \sqrt{(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2}}{\sqrt{(f^2 + g^2)^3}},$$

$$\tau_{\psi_3} = \frac{\sigma_3 f^2 \gamma (h\gamma - \bar{\kappa})' + \sigma_3 f g \beta \gamma (h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3 f^2 g \gamma^3 - \sigma_3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) (f\gamma)'}{f^2 [(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2]}$$

şeklindedir.

İspat. α , s yay uzunluğu parametrelili bir eğri ve ψ_3 , s^* yay uzunluğu parametrelili bir eğri olduğunu varsayalım. Ayrıca, α 'nın alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \kappa, \tau\}$ ve ψ_3 'ün Frenet elemanları $\{T_{\psi_3}, N_{\psi_3}, B_{\psi_3}, \kappa_{\psi_3}, \tau_{\psi_3}\}$ 'dir.

Bu denklemde s^* 'a göre (D.4) cinsinden türev alınır:

$$\begin{aligned}\psi_3'(s^*) &= \alpha(s) \wedge W(s) \\ &= (f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s)) \wedge W(s) \\ &= f(s) \underbrace{(N(s) \wedge W(s))}_{-C} + g(s) \underbrace{(C(s) \wedge W(s))}_N + f \underbrace{(W(s) \wedge W(s))}_0 \\ &= g(s)N(s) - f(s)C(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin tekrar s^* 'a göre türevi alınır:

$$\begin{aligned}\psi_3''(s^*) &= \frac{d\psi_3'(s)}{ds^*} \\ &= \frac{d\psi_3'(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= g'N + gN' - f'C - fC' \\ &= (h\gamma - f\beta - \bar{\kappa})N + g\beta C - g\beta C - f(-\beta N + \gamma W) \\ &= (h\gamma - f\beta - \bar{\kappa} + f\beta)N - f\gamma W\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{ds}{ds^*} = \sigma_3$ denirse

$$\psi_3''(s^*) = \sigma_3(h\gamma - \bar{\kappa})N - \sigma_3 f\gamma W$$

elde edilir. Buradan norm alınır:

$$\sigma_3 = \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{(h\gamma - \bar{\kappa})^2 + (f\gamma)^2}},$$

$$\psi_3''(s^*) = \frac{h\gamma - \bar{\kappa})N - f\gamma W}{\sqrt{(h\gamma - \bar{\kappa})^2 + (f\gamma)^2}}$$

elde edilir. Üçüncü türev alınır:

$$\begin{aligned}
\psi_3'''(s^*) &= \frac{d\psi_3''(s)}{ds^*} \\
&= \frac{d\psi_3''(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\
&= \sigma_3'((h\gamma - \bar{\kappa})N - f\gamma W) + \sigma_3((h\gamma - \bar{\kappa})'N + (h\gamma - \bar{\kappa})N' - (f\gamma)'W - (f\gamma)W') \\
&= \sigma_3'((h\gamma - \bar{\kappa})N - f\gamma W) + \sigma_3((h\gamma - \bar{\kappa})'N + (h\gamma - \bar{\kappa})\beta C - (f\gamma)'W - (f\gamma)(-\gamma C)) \\
&= (\sigma_3'(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3(h\gamma - \bar{\kappa})')N + (\sigma_3\beta(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3f\gamma^2)C - (\sigma_3'(f\gamma) + \sigma_3(f\gamma)')W
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \psi_3'''(s^*) &= \sigma_3((\sigma_3'(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3(h\gamma - \bar{\kappa})')N + (\sigma_3\beta(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3f\gamma^2)C - (\sigma_3'(f\gamma) + \sigma_3(f\gamma)')W) \\
&= (\sigma_3\sigma_3'(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3^2(h\gamma - \bar{\kappa})')N + (\sigma_3^2\beta(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3^2f\gamma^2)C - (\sigma_3\sigma_3'(f\gamma) + \sigma_3^2(f\gamma)')W \\
&= P_3N + R_3C + S_3W
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
P_3 &= \sigma_3\sigma_3'(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3^2(h\gamma - \bar{\kappa})', \\
R_3 &= \sigma_3^2\beta(h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3^2f\gamma^2, \\
S_3 &= -\sigma_3\sigma_3'f\gamma - \sigma_3^2(f\gamma)'
\end{aligned}$$

dir. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
\psi_3'(s^*) &= gN - fC, \\
\Rightarrow \|\psi_3'(s^*)\| &= \sqrt{f^2 + g^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\psi_3'(s^*) \wedge \psi_3''(s^*) &= (gN - fC) \wedge (\sigma_3(h\gamma - \bar{\kappa})N - \sigma_3f\gamma W) \\
&= \sigma_3g(h\gamma - \bar{\kappa})(N \wedge N) - \sigma_3fg\gamma(N \wedge W) - \sigma_3f(h\gamma - \bar{\kappa})(C \wedge N) + \sigma_3f^2\gamma(C \wedge W) \\
&= \sigma_3f^2\gamma N + \sigma_3fg\gamma C + \sigma_3f(h\gamma - \bar{\kappa})W.
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|\psi_3'(s^*) \wedge \psi_3''(s^*)\| &= \sqrt{(\sigma_3f^2\gamma)^2 + (\sigma_3fg\gamma)^2 + (\sigma_3f(h\gamma - \bar{\kappa}))^2} \\
&= \sigma_3f\sqrt{(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\det(\psi'_3, \psi''_3, \psi'''_3) &= \begin{vmatrix} g & -f & 0 \\ +\sigma_3(h\gamma - \bar{\kappa}) & 0 & -\sigma_3 f \gamma \\ P_3 & R_3 & S_3 \end{vmatrix} \\
&= \sigma_3 f^2 \gamma P_3 + \sigma_3 f g \gamma R_3 + \sigma_3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) S_3 \\
&= \sigma_3 f^2 \gamma \sigma_3 \sigma'_3 (h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3 f^2 \gamma \sigma_3^2 (h\gamma - \bar{\kappa})' + \sigma_3 f g \gamma \sigma_3^2 \beta (h\gamma - \bar{\kappa}) \\
&\quad + \sigma_3 f g \gamma \sigma_3^2 f \gamma^2 - \sigma_3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) \sigma_3 \sigma'_3 f \gamma - \sigma_3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) \sigma_3^2 (f \gamma)' \\
&= \sigma_3^2 f^2 \gamma (h\gamma - \bar{\kappa}) \sigma'_3 + \sigma_3^3 f^2 \gamma (h\gamma - \bar{\kappa})' + \sigma_3^3 f g \beta \gamma (h\gamma - \bar{\kappa}) \\
&\quad + \sigma_3^3 f^2 g \gamma^3 - \sigma_3^2 f^2 \gamma (h\gamma - \bar{\kappa}) \sigma'_3 - \sigma_3^3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) (f \gamma)' \\
&= \sigma_3^3 f \gamma (h\gamma - \bar{\kappa})' + \sigma_3^3 f g \gamma \beta (h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3^3 f^2 g \gamma^3 - \sigma_3^3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) (f \gamma)'
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemler kullanılarak

$$T_{\psi_3} = \frac{\psi'_3}{\|\psi'_3\|} = \frac{gN - fC}{\sqrt{f^2 + g^2}},$$

$$N_{\psi_3} = B_{\psi_3} \wedge T_{\psi_3} = \frac{f(h\gamma - \bar{\kappa})N + g(h\gamma - \bar{\kappa})C - \gamma(f^2 + g^2)W}{\sqrt{(f^2 + g^2)((f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2)}},$$

$$B_{\psi_3} = \frac{\psi'_3 \wedge \psi''_3}{\|\psi'_3 \wedge \psi''_3\|} = \frac{f\gamma N + g\gamma C + (h\gamma - \bar{\kappa})W}{\sqrt{(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2}},$$

$$\kappa_{\psi_3} = \frac{\|\psi'_3 \wedge \psi''_3\|}{\|\psi'_3\|^3} = \frac{\sigma_3 f \sqrt{(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2}}{\sqrt{(f^2 + g^2)^3}},$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\psi_3} &= \frac{\det(\psi'_3, \psi''_3, \psi'''_3)}{\|\psi'_3 \wedge \psi''_3\|^2} \\
&= \frac{\sigma_3 f^2 \gamma (h\gamma - \bar{\kappa})' + \sigma_3 f g \beta \gamma (h\gamma - \bar{\kappa}) + \sigma_3 f^2 g \gamma^3 - \sigma_3 f (h\gamma - \bar{\kappa}) (f \gamma)'}{f^2 [(f\gamma)^2 + (g\gamma)^2 + (h\gamma - \bar{\kappa})^2]}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. ■

Tanım 3.4. α ; sıfırdan farklı eğriliğe ve burulmaya sahip, s yay uzunluğu parametrelili regüler bir eğri olsun. Eğer α 'nın alternatif çatası $\{N, C, W\}$ ise α 'nın yay uzunluğu parametresi s^* olan D - dual yönlü eğrisi:

$$\psi_4(s^*) = \int_{s_0^*}^{s^*} (\alpha(s) \wedge D(s)) ds^* \tag{D.5}$$

şekilde tanımlanır.

$\psi_4(s^*)$ 'ün α 'nın D - dual yönlü eğrisi olduğunu varsayalım. ψ_4 'ün Frenet vektör alanlarını, eğriliğini ve burulmasını hesaplayalım.

Teorem 3.4. $\alpha(s)$, \mathbb{E}^3 'te birim hıza sahip regüler bir eğri olsun. $\{N, C, W\}$, α 'nın alternatif çatısı ve $\psi_4(s^*)$, α 'nın D - dual yönlü eğrisi olsun. O zaman $\psi_4(s^*)$ 'nin Frenet vektör alanları, eğriliği ve burulması şu şekilde verilir:

$$T_{\psi_4} = \frac{g\beta N + (h\gamma - f\beta)C - g\gamma W}{\sqrt{(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2}},$$

$$N_{\psi_4} = \frac{\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -g\gamma[g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)'] - (h\gamma - f\beta)[g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'] \\ + g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta) \end{array} \right\} N \\ + \left\{ \begin{array}{l} g\beta[g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)' + g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)] \\ + g\gamma[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3] \end{array} \right\} C \\ + \left\{ \begin{array}{l} (h\gamma - f\beta)[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma] \\ + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3 - g\beta[g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)'] \end{array} \right\} W \end{array} \right)}{\sqrt{[(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2]\{\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3\}^2 + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]^2}},$$

$$B_{\psi_4} = \frac{\left(\begin{array}{l} [\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3]N \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']C \\ + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]W \end{array} \right)}{\sqrt{[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3]^2 + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]^2}},$$

$$\kappa_{\psi_4} = \frac{\sigma_4 \sqrt{[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3]^2 + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]^2}}{(\sqrt{(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2})^3},$$

$$\tau_{\psi_4} = \frac{\left(\begin{array}{l} \{g\gamma(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) + (h\gamma - f\beta)(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')\}P_4 \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']R_4 \\ + \{g\beta(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) - (h\gamma - f\beta)((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))\}S_4 \end{array} \right)}{\sigma_4^2 \left\{ \begin{array}{l} [\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3]^2 \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' \\ + \beta(h\gamma - f\beta)]^2 \end{array} \right\}}$$

şeklindedir.

İspat. α , s yay uzunluğunda parametrelili eğri ve ψ_4 , s^* yay uzunluğunda parametrelili eğri olduğunu varsayalım. Ayrıca, α 'nın alternatif çatı elemanları $\{N, C, W, \kappa, \tau\}$ ve ψ_4 'ün Frenet çatı elemanları $\{T_{\psi_4}, N_{\psi_4}, B_{\psi_4}, \kappa_{\psi_4}, \tau_{\psi_4}\}$ 'dir.

Bu denklemde s^* 'a göre (D.5) cinsinden türev alınırsa

$$\begin{aligned} \psi_4'(s^*) &= \alpha(s) \wedge D(s) \\ &= (f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s)) \wedge (\gamma(s)N(s) + \beta(s)W(s)) \\ &= f(s)\gamma(s) \underbrace{(N(s) \wedge N(s))}_0 + g(s)\gamma(s) \underbrace{(C(s) \wedge N(s))}_{-W} + h(s)\gamma(s) \underbrace{(W(s) \wedge N(s))}_C \\ &\quad + f(s)\beta(s) \underbrace{(N(s) \wedge W(s))}_{-C} + g(s)\beta(s) \underbrace{(C(s) \wedge W(s))}_N + h(s)\beta(s) \underbrace{(W(s) \wedge W(s))}_0 \\ &= g\beta N + (h\gamma - f\beta)C - g\gamma W \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin tekrar s^* 'a göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \psi_4''(s^*) &= \frac{d\psi_4'(s)}{ds^*} \\ &= \frac{d\psi_4'(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= (g\beta)'N + (g\beta)N' + (h\gamma - f\beta)'C + (h\gamma - f\beta)C' - (g\gamma)'W - (g\gamma)W' \\ &= (g\beta)'N + (g\beta)\beta C + (h\gamma - f\beta)'C + (h\gamma - f\beta)(-\beta N + \gamma W) - (g\gamma)'W - (g\gamma)(-\gamma C) \\ &= ((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')W \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{ds}{ds^*} = \sigma_4$ denirse

$$\psi_4''(s^*) = \sigma_4(((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')W)$$

elde edilir. Buradan norm alınırsa

$$\sigma_4 = \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))^2 + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)^2 + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')^2}},$$

$$\psi_4''(s^*) = \frac{((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')W}{\sqrt{((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))^2 + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)^2 + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')^2}}$$

elde edilir. Üçüncü türev alınırsa

$$\begin{aligned} \psi_4'''(s^*) &= \frac{d\psi_4''(s)}{ds^*} \\ &= \frac{d\psi_4''(s)}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= \sigma_4'(((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')W) \\ &\quad + \sigma_4(((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))'N + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)'C + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')'W) \\ &\quad + (((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N' + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C' + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')W') \\ &= \sigma_4'(((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')W) \\ &\quad + \sigma_4(((g\beta)'' - (\beta(h\gamma - f\beta))')N + ((g\beta^2)' + (h\gamma - f\beta)'' + (g\gamma^2)')C \\ &\quad + ((\gamma(h\gamma - f\beta))' - (g\gamma)'')W + (((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))\beta C \\ &\quad + (g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)(-\beta N + \gamma W) + (\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)'(-\gamma C)) \\ &= (\sigma_4'((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)) + \sigma_4((g\beta)'' - (\beta(h\gamma - f\beta))') - \sigma_4\beta(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2))N \\ &\quad + \left(\begin{array}{l} (\sigma_4'(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) + \sigma_4((g\beta^2)' + (h\gamma - f\beta)'' + (g\gamma^2)') \\ + \sigma_4\beta((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)) - \sigma_4\gamma(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)') \end{array} \right) C \\ &\quad + (\sigma_4'(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)') + \sigma_4\gamma(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) + \sigma_4((\gamma(h\gamma - f\beta))' - (g\gamma)''))W. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi_4'''(s^*) &= \sigma_4 \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (\sigma_4'((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)) + \sigma_4((g\beta)'' - (\beta(h\gamma - f\beta))') \\ - \sigma_4\beta(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) \end{array} \right) N \\ + \left(\begin{array}{l} (\sigma_4'(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) + \sigma_4((g\beta^2)' + (h\gamma - f\beta)'' + (g\gamma^2)') \\ + \sigma_4\beta((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)) - \sigma_4\gamma(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)') \end{array} \right) C \\ + \left(\begin{array}{l} (\sigma_4'(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)') + \sigma_4\gamma(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) \\ + \sigma_4((\gamma(h\gamma - f\beta))' - (g\gamma)'') \end{array} \right) W \end{array} \right) \\ &= P_4N + R_4C + S_4W \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} P_4 &= \sigma_4[(g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)]\sigma_4' + -\sigma_4^2[(g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)]' - \sigma_4^2\beta[g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2], \\ R_4 &= \sigma_4[g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2]\sigma_4' + \sigma_4^2[g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2]' + \sigma_4^2\beta[(g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta)], \\ &\quad - \sigma_4^2\gamma[\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)'], \\ S_4 &= \sigma_4[\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)']\sigma_4' + \sigma_4^2\gamma[g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2] + \sigma_4^2[\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)']' \end{aligned}$$

dir. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}\psi'_4(s^*) &= g\beta N + (h\gamma - f\beta)C - g\gamma W, \\ \Rightarrow \|\psi'_4(s^*)\| &= \sqrt{(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\psi'_4(s^*) \wedge \psi''_4(s^*) &= (g\beta N + (h\gamma - f\beta)C - g\gamma W) \wedge \left(\sigma_4 \begin{pmatrix} ((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))N \\ +(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)C \\ +(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)'W) \end{pmatrix} \right) \\ &= g\beta((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))(N \wedge N) + g\beta(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)(N \wedge C) \\ &\quad + g\beta(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')(N \wedge W) + (h\gamma - f\beta)((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))(C \wedge N) \\ &\quad + (h\gamma - f\beta)(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2)(C \wedge C) + (h\gamma - f\beta)(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')(C \wedge W) \\ &= \sigma_4 \begin{pmatrix} (\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' + g^2\gamma^3)N \\ +(g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)')C \\ +(g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)' + g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta))W \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\psi'_4(s^*) \wedge \psi''_4(s^*)\| = \sigma_4 \sqrt{\begin{aligned} &[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)' \\ &+ g^2\gamma^3]^2 + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 \\ &+ g\beta(h\gamma - f\beta)' + g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]^2 \end{aligned}}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\det(\psi'_4, \psi''_4, \psi'''_4) &= \begin{vmatrix} g\beta & h\gamma - f\beta & -g\gamma \\ (g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta) & g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2 & \gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)' \\ P_4 & R_4 & S_4 \end{vmatrix} \\ &= \{g\gamma(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) + (h\gamma - f\beta)(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')\}P_4 \\ &\quad + \{g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)'\}R_4 \\ &\quad + \{g\beta(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)' + g\gamma^2) - (h\gamma - f\beta)((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))\}S_4\end{aligned}$$

dir. Bu denklemleri kullanarak

$$T_{\psi_4} = \frac{\psi'_4}{\|\psi'_4\|} = \frac{g\beta N + (h\gamma - f\beta)C - g\gamma W}{\sqrt{(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2}},$$

$$\begin{aligned}
N_{\psi_4} &= B_{\psi_4} \wedge T_{\psi_4}, \\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -g\gamma[g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)'] - (h\gamma - f\beta)[g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'] \\ + g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta) \end{array} \right\} N \\ + \left\{ \begin{array}{l} g\beta[g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)'] + g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)] \\ + g\gamma[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3 \end{array} \right\} C \\ + \left\{ \begin{array}{l} (h\gamma - f\beta)[\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma] \\ + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3 - g\beta[g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)'] \end{array} \right\} W \end{array} \right)}{\sqrt{\begin{array}{l} [(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2]\{\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma \\ + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3\}^2 + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)']g^2\beta\gamma^2 \\ - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]^2},}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\psi_4} &= \frac{\psi'_4 \wedge \psi''_4}{\|\psi'_4 \wedge \psi''_4\|}, \\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} [\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3]N \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']C \\ + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)']g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' + \beta(h\gamma - f\beta)]W \end{array} \right)}{\sqrt{\begin{array}{l} [\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3]^2 \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)']g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' \\ + \beta(h\gamma - f\beta)]^2}
\end{array}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\psi_4} &= \frac{\|\psi'_4 \wedge \psi''_4\|}{\|\psi'_4\|^3}, \\
&= \frac{\sigma_4 \sqrt{\begin{array}{l} [\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3]^2 \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)']g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' \\ + \beta(h\gamma - f\beta)]^2} {(\sqrt{(g\beta)^2 + (h\gamma - f\beta)^2 + (g\gamma)^2})^3},
\end{array}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\psi_4} &= \frac{\det(\psi'_4, \psi''_4, \psi'''_4)}{\|\psi'_4 \wedge \psi''_4\|^2}, \\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} \{g\gamma(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)'] + g\gamma^2) + (h\gamma - f\beta)(\gamma(h\gamma - f\beta) - (g\gamma)')\}P_4 \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']R_4 \\ + \{g\beta(g\beta^2 + (h\gamma - f\beta)'] + g\gamma^2) - (h\gamma - f\beta)((g\beta)' - \beta(h\gamma - f\beta))\}S_4 \end{array} \right)}{\sigma_4^2 \left\{ \begin{array}{l} [\gamma(h\gamma - f\beta)^2 - (h\gamma - f\beta)(g\gamma)' + g^2\beta^2\gamma + g\gamma(h\gamma - f\beta)'] + g^2\gamma^3]^2 \\ + [g\beta(g\gamma)' - g\gamma(g\beta)']^2 + [g^2\beta^3 + g\beta(h\gamma - f\beta)']g^2\beta\gamma^2 - (h\gamma - f\beta)(g\beta)' \\ + \beta(h\gamma - f\beta)]^2 \end{array} \right\}}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. ■

Örnek 3.5. $\alpha_1(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$ dairesel bir helistir. Bu eğrinin $N(s)$ ve ψ_1 , N -dual yönlü eğrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$N(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right), \psi_1(s) = \int \alpha_1(s) \wedge N(s) ds = \int \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{s}{\sqrt{3}} \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right) ds.$$

$\psi_1(s)$ dual yönlü eğrisinin Frenet elemanları:

$$T_{\psi_1} = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right),$$

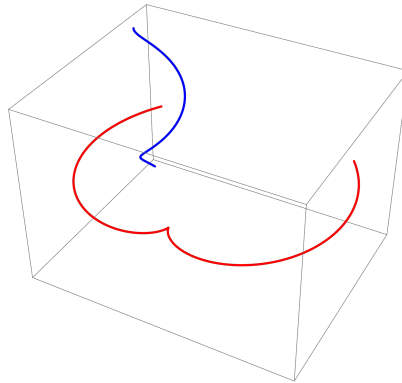
$$N_{\psi_1} = \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right),$$

$$B_{\psi_1} = (0, 0, 1),$$

$$\kappa_{\psi_1} = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

$$\tau_{\psi_1} = 0$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.1: Helis eğrisi $\alpha_1(s)$ (mavi) ve yönlü moment eğrisi $\psi_1(s)$ 'nin (kırmızı) $s \in [-6.5, 6.5]$ aralığı üzerindeki çizimi.

Örnek 3.6. $\alpha_3(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$ dairesel bir helistir. Bu eğrinin $W(s)$ ve ψ_3 , W -dual yönlü eğrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$W(s) = \left(\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\psi_3(s) = \int \alpha_3(s) \wedge W(s) ds = \int \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{s}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \cos \frac{2s}{\sqrt{3}} \right) ds.$$

$\psi_3(s)$ dual yönlü eğrisinin Frenet elemanları:

$$\begin{aligned}
T_{\psi_3} &= \left(\frac{\cos \frac{s}{\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sin \frac{s}{\sqrt{3}}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
N_{\psi_3} &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4} \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, 0 \right), \\
B_{\psi_3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\
\kappa_{\psi_3} &= \frac{1}{4}, \\
\tau_{\psi_3} &= -\frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.7. $\alpha_4(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$ dairesel bir helistir. Bu eğrinin $D(s)$ ve ψ_4 , D -dual yönlü eğrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$D(s) = \left(\sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{s}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\psi_4(s) = \int \alpha_3(s) \wedge W(s) ds = \int \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \frac{s}{\sqrt{3}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{3}} - \cos \frac{s}{\sqrt{3}} \right), \cos \frac{2s}{\sqrt{3}} \right) ds.$$

$\psi_3(s)$ dual yönlü eğrisinin Frenet elemanları:

$$\begin{aligned}
T_{\psi_4} &= \left(\frac{\cos \frac{s}{\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sin \frac{s}{\sqrt{3}}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right), \\
N_{\psi_4} &= (0, 0, 0), \\
B_{\psi_4} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{3}}, \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\
\kappa_{\psi_4} &= \frac{\sqrt{2}}{4}, \\
\tau_{\psi_4} &= -\frac{\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında alternatif bir ortogonal çatıya göre uzay eğrilerinin yönlü vektörel moment eğrileri oluşturulmuştur. Söz konusu integral eğrilerine ait Frenet elemanları elde edilmiştir. Bu teorik yapı dual yönlendirilmiş eğrilere uygulanarak alternatif çatılardan yararlanmanın klasik geometriye sunduğu katkıları ortaya koymuştur. Bu yaklaşım, yönlü vektörel momentler ve alternatif çatı teorisi arasında bağlantılar kurmasına yardımcı olur.

Sonuç olarak alternatif çatının, Frenet çatısına kıyasla klasik yapının işlevselliğinin bozulduğu veya tanımlayıcı gücünü kaybettiği durumlarda daha sağlam araçlar sunabileceğini vurgulamaktadır. Dolayısıyla çalışma, hem teorik hem de uygulamalı bağlamlarda eğri dinamiklerinin daha derin ve kapsamlı bir şekilde anlaşılması için alternatif çatıların benimsenmesinin gerekliliğini vurgulamaktadır. Gelecekteki çalışmalar; bu sonuçları daha yüksek boyutlu ortamlara, Öklid dışı geometrilere veya kinematik, robotik ve bilgisayar destekli geometrik tasarım gibi uygulamalı alanlara genişletebilir.

KAYNAKÇA

- Barros, M. (1997). General helices and a theorem of Lancret. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(5), 1503–1509.
- Choi, J., & Kim, Y. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Mathematics and Computer Science*, 218(18), 9116–9124.
- Çiftçi, Ü. (2009). A generalization of Lancret theorem. *The Journal of Geometry and Physics*, 59(12), 1597–1603.
- Deshmukh, S., Chen, B., & Alghanemi, A. (2018). Natural mates of Frenet curves in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(5), 2826–2840.
- Gray, A. (1997). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, Boca Raton, FL.
- Karagöz, N. (2024). *Yönlü vektörel moment eğrileri*. (Yüksek Lisans Tezi). Gaziantep Üniversitesi, Lisans Eğitim Enstitüsü, Gaziantep.
- Kaya, S., & Güven, İ. A. (2023). Construction of vectorial moments via direction curves. *American Institute of Mathematical Sciences Mathematics*, 8, 12857–12871.
- Kaya, O., & Önder, M. (2017). New partner curves in the Euclidean 3-space E^3 . *International Journal of Geometry*, 6(2), 41–50.
- Körpınar, T., Sarıaydın, M., & Turhan, E. (2013). Associated curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. *Advances in Modeling and Optimization*, 15(3), 713–717.
- Millman, R., & Parker, G. (1977). *Elements of Differential Geometry*. Pearson, London.
- Nurkan, S. K., Güven, İ. A., & Karacan, M. K. (2019). Characterizations of adjoint curves in Euclidean 3-space. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 89(1), 155–161.
- Yüce, S. (2020). *Diferansiyel Geometri*. Pegem Akademi.
- Struik, D. (1988). *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publications, New York.
- Şardağ, H. (2019). *Alternatif çatının vektörel moment eğrileri üzerine*. (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Lisans Eğitim Enstitüsü, Ordu.
- Şenyurt, S., Şardağ, H., & Çakır, O. (2020). On vectorial moment of the Darboux vector. *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(1), 144–151.
- Şenyurt, S. (2018). D-Smarandache curves according to the Sabban frame of the spherical indicatrix curve. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 9, 39–49.
- Tuncer, Y. (2017). Vectorial moments of curves in Euclidean 3-space. *International Journal of*

Geometric Methods in Modern Physics, 14(2), 1750020.

Yılmaz, S. (2015). Characterizations of some associated and special curves to type-2 Bishop frame in E^3 . *Kirklareli University Journal of Engineering and Science*, 1, 66–77.