T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK BAĞINTIYA YENİ BİR YAKLAŞIM VE ONUN KARAR VERME PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF KARAKÖSE

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR ÜYESİ KEMAL TAŞKÖPRÜ

BİLECİK, 2022
10442987

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK BAĞINTIYA YENİ BİR YAKLAŞIM VE ONUN KARAR VERME PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF KARAKÖSE

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR ÜYESİ KEMAL TAŞKÖPRÜ

BİLECİK, 2022
10442987

BEYAN

Esnek Bağıntıya Yeni Bir Yaklaşım ve Onun Karar Verme Problemlerine Uygulanması adlı yüksek lisans/doktora/sanatta yeterlik tezi/dönem projesinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel ahlak kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırmalar Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte beyan edilmelidir.			
DESTEK ALINMIŞTIR		**DESTEK ALINMAMIŞTIR**	■
Destek alındı ise;			
Destekleyen Kurum:			
Desteğin Türü		**Proje Numarası**	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)			
2- TÜBİTAK			
Diğer;			

Elif KARAKÖSE

28.01.2022

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterip, destek olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Kemal TAŞKÖPRÜ'ye teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme ve sevgili eşim Mustafa KARAKÖSE'ye teşekkür ederim.

Elif KARAKÖSE
28.01.2022

ÖZET

ESNEK BAĞINTIYA YENİ BİR YAKLAŞIM VE ONUN KARAR VERME PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci Bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde esnek küme ve esnek küme işlemleri ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. Esnek kümeler üzerindeki bağıntı kavramına genel bir bakış sunulduktan sonra esnek eleman ve elemanter esnek küme işlemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak esnek eleman kavramını baz alarak esnek bağıntı tanımlanmıştır. Esnek bağıntının temel özellikleri verildikten sonra esnek bağıntılar ile klasik bağıntılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir ve bazı örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde esnek eleman ve esnek bağıntının karar verme problemlerinde kullanılabilmesi için bir algoritma sunulmuştur ve bu algoritmayı kullanarak açıklayıcı örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, esnek eleman, esnek bağıntı, karar verme.

ABSTRACT

A NEW APPROACH TO SOFT RELATION AND ITS APPLICATION TO DECISION-MAKING PROBLEMS

This study consists of four chapters. In the first chapter, it is given the introduction part. In the second chapter, the basic concepts of soft set and soft set operations are introduced. After giving an overview of the relation concept on soft sets, soft element and elementary soft set operations are given.

In the third chapter, unlike the previous studies, the soft relation is defined based on the concept of soft element. After the basic properties of the soft relations are given, the relationships between the soft relations and the classical relations are examined and some examples are given.

In the fourth chapter, an algorithm is presented to use the soft element and soft relation in decision-making problems and an illustrative example is given using this algorithm.

Keywords: Soft set, soft element, soft relation, decision-making

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

P	: Parametreler kümesi
U	: Evrensel küme
$P(U)$	: Evrensel kümenin kuvvet kümesi
(F,P)	: Esnek küme
$S_P(U)$	: U üzerindeki P parametreli tüm esnek kümelerin ailesi
Φ	: Boş esnek küme
$\tilde{U}$	: Mutlak esnek küme
$\tilde{\subset}$	: Esnek alt küme
$\tilde{\supset}$	: Esnek üst küme
$\tilde{\cup}$	: Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	: Esnek kesişim
$(F,P)^C$	: (F,P)'nin esnek tümleyeni
$\tilde{\times}$	: Esnek kartezyen çarpım
$\tilde{\in}$	: Esnek elemanıdır
$\tilde{x}$	: Esnek eleman
$\mathfrak{B}$	: Esnek eleman sınıfı
$SE((F,P))$	: (F,P)'nin tüm esnek elemanlarının sınıfı
$SS(\mathfrak{B})$	: $\mathfrak{B}$ esnek eleman sınıfının ürettiği esnek küme
$\Cup$	: Esnek elemanter birleşim
$\Cap$	: Esnek elemanter kesişim
$F^{\mathbb{C}}$	: Esnek elemanter tümleyen
$\mathcal{R}$	: Esnek bağıntı
$\mathcal{R}^{(123)}$	: Sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 klasik bağıntıları ile üretilen esnek bağıntı
$cl\mathcal{R}^t$	: $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının geçişli kapanışı
$[\tilde{x}]_{\mathcal{R}}$	: $\tilde{x}$'nın esnek denklik sınıfı
$\tilde{U}/\mathcal{R}$	: $\tilde{U}$'nın $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısına göre bölüm kümesi
$\tilde{\precsim}$	: Esnek sıralama bağıntısı

1. GİRİŞ

Ekonomi, mühendislik, çevre bilimleri ve sosyal bilimler gibi alanlarda doğruluk değeri göreceli olan kavramlarla sıklıkla karşılaşılır. Bu durumda, belirsizlik içeren bir problemin matematiksel olarak ele alınabilmesi ve çözülebilmesi için Aristo mantığı yetersiz kalabilir. Bunun gibi sorunlarla başa çıkabilmek için olasılık teorisi (Kolmogorov, 1950: 21), bulanık kümeler teorisi (Zadeh, 1965: 338), yaklaşımlı kümeler teorisi (Pawlak, 1982: 341), sezgisel bulanık kümeler teorisi (Atanassov, 1986: 87), aralık matematiği teorisi (Gorzalzany, 1987:1) ve esnek kümeler teorisi (Molodtsov, 1999: 19) gibi teoriler geliştirilmiştir.

Esnek kümeler teorisinde, diğer küme teorilerinde karşılaşılan problemlerden bir parça da olsa kurtulabilmek için örneğin; bulanık kümeler teorisinde kullanılan reel değerli üyelik fonksiyonunun aksine, küme değerli bir dönüşüm kullanılmıştır. Bu şekilde bir esnek küme, bir parametreler kümesinden bir evrensel kümenin alt kümelerine bir dönüşüm olarak tanımlanmıştır. Esnek kümeler teorisi, oyun teorisi, olasılık teorisi, optimizasyon teorisi, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, Riemann integrasyonu, Peron integrasyonu ve yöneylem araştırması gibi alanlara D. Molodtsov tarafından başarılı bir şekilde uygulamıştır (Molodtsov, 1999: 19; Molodtsov, 2004). P. K. Maji ve arkadaşları esnek küme teorisini karar verme problemlerinde kullanmış, esnek kümelerin bazı işlemlerini tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir (Maji vd., 2002, 2003). Bunun dışında birçok araştırmacı da esnek küme işlemlerini farklı şekillerde yorumlayarak geliştirmeye çalışmıştır (Ali vd., 2009: 1557; Aygün ve Kamacı, 2019: 6537; Chen vd., 2005: 757; Das ve Samanta, 2012: 551; Sezgin ve Atagün, 2011: 1457). Birçok cebirsel ve topolojik yapı da esnek küme teorisine aktarılmış, yine bu matematiksel yapıların esnek kümelere aktarılmasındaki farklı yaklaşımlar ile farklı uygulama ve geliştirme olanakları doğmuştur (Akgüller, 2021 :599; Aktaş ve Çağman, 2007: 2726; Ali vd.,2017: 1525; Altıntaş ve Taşköprü, 2020: 2199; Altıntaş vd., 2021: 7811; Aygün ve Kamacı, 2019: 6537; Çetkin vd., 2020: 12,731; Chiney ve Samanta, 2019: 459; Das ve Samanta, 2013: 707; Güler vd., 2016: 885; Jun ve Park, 2008: 2466; Kandemir, 2018: 4353; Taşköprü ve Altıntaş, 2021: 7556). Bunların yanında esnek küme teorisi, diğer küme teorileri ile birleştirilerek hibrit esnek kümeler tanımlanmış ve bu kümeler üzerinde de çeşitli matematiksel yapılar verilerek karar verme problemlerinin çözümü için uygulamalar sunulmuştur (Alcantud, 2016: 45; Aygünoğlu vd., 2012: 207; Deli, 2017: 665; Freng vd., 2010a: 10; Freng vd., 2010b: 899; Harevan ve Deris, 2011: 186; Kamacı, 2021: 3917; Pei ve Miao, 2005: 617; Zhan ve Alcantud, 2019: 2381).

Bağıntılar, farklı yapıların da birbirleriyle ilişkili olabileceği gerçeğinin bir sonucu olarak, birçok araştırmacı tarafından nesneleri sınıflandırmak, sıralamak veya karşılaştırmak için kullanılan temel kavramlardır (Rosen, 2019; Suzumura, 1983). Esnek küme teorisini bağıntılara uygulamak adına, iki nesne arasındaki ilişkideki belirsizliği modellemek için esnek kümeler üzerindeki bağıntılar tanıtılmıştır (Abbas vd., 2014: 1191; Alcantud, 2021: 1; Babitha ve Sunil, 2010: 1840; Babitha ve Sunil, 2011: 2235; Freng vd., 2013: 1183; Kanwal vd., 2020: 1; Park vd., 2012: 1079; Qin vd., 2015: 819; Yang ve Guo, 2011: 651). Ayrıca esnek kümeler üzerindeki bağıntı kavramı ile topolojik yapılar ve karar verme uygulamaları çalışılmıştır (Al-Shami ve El-Shafei, 2020: 8; Al-Shami ve El-Shafei, 2019: 556; El-Shafei ve Al-Shami, 2020: 1; Yaylalı vd., 2017: 81). Dahası hibrit esnek kümeler üzerinde de bağıntı kavramı çalışılmış ve karar verme problemlerinin çözümü için farklı uygulamalar sunulmuştur (Alhazaymeh ve Hassan, 2015: 1205; Dalkılıç, 2021: 1; Kanwal ve Shabir, 2019: 1; Karaaslan, 2016: 105; Qamar ve Hassan, 2018: 1). Bağıntı ile ilgili tüm bu çalışmalarda, bir bağıntı aslında bir esnek kümeye veya hibrit esnek kümeye karşılık gelecek şekilde tanımlanmıştır. Ayrıca karar verme problemlerini ele alan çalışmalarda seçimin, genellikle alternatifler arasından ağırlıklara ve niteliklere göre belirlenen yalnız bir öğeye karşılık geldiği görülmektedir.

Bir karar verme probleminde alternatifler belirli faktörlerden oluşabilir ve tercihi oluşturacak faktörlerin istenilen kriterlere göre belirlenmesi istenebilir. Buna uygun olarak, esnek elemanlar tek elemanlı esnek kümelere karşılık gelir ve bir esnek eleman, esnek kümenin içinden her bir tanımlayıcı nitelik için uygun alternatifi belirleyen bir model sağlar (Das ve Samanta, 2012: 551). Bu çalışmada, alternatifleri oluşturan faktörler ve alternatifler arasındaki ilişkileri araştırmak için esnek eleman kavramının yararlı ve uygulanabilir olabileceği gösterilmiştir. Esnek kümelerdeki bağıntılarla ilgili önceki çalışmalardan farklı olarak, esnek bağıntıya, esnek eleman kavramının kullanıldığı yeni bir yaklaşım önerilmiş ve bu kavramın karar verme problemlerinde kullanışlı olabileceği gösterilmiştir. Bu yaklaşım topolojiye, sıra teorisine ve fayda teorisine kadar genişletilebilir ve karar vermede kullanılacak hibrit esnek kümelere de aktarılabilir.

Bu tez çalışmasında, ikinci bölümde esnek kümelerdeki bağıntılarla ilgili önceki çalışmalara genel bir bakış sunulmakta ve esnek kümeler ve esnek eleman kavramı hakkında temel bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde bir esnek bağıntı, esnek elemanlar koleksiyonu kullanılarak tanımlanmıştır. Esnek bağıntıların ilgili tanımları ve bazı özellikleri verildikten sonra bu bağıntıların ve klasik bağıntıların etkileşimleri incelenmiştir. Esnek denklik ve sıralama bağıntılarının klasik bağıntılardan farklı özelliklere sahip olduğu görülmüştür. Son bölümde, seçimin bir esnek eleman olarak yapıldığı, yani alternatifi oluşturacak her bir faktörün belirlenen parametrelere karşılık getirilerek tercihin yapıldığı ve seçimin diğer alternatifler tarafından etkilendiği karar verme problemlerini ele almak için esnek bağıntı tabanlı bir algoritma önerilmiştir. Ardından, açıklayıcı bir örnek olarak optimal bir sistem seçimi ve optimal sistem entegrasyonunu sağlanması ile ilgili bir uygulama verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda önce esnek küme, esnek küme işlemleri ve esnek küme bağıntısı ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır. Daha sonra esnek eleman ve esnek kümeler üzerinde esnek elemanlar kullanılarak yapılan elemanter esnek birleşim, elemanter esnek kesişim ve elemanter esnek tümleyen olarak adlandırılan elemanter esnek işlemler ve bu işlemlerin bazı özellikleri verilmiştir.

2.1. Esnek Küme ve Esnek Küme İşlemleri

Tanım 2.1.1. $U \neq \varnothing$ bir küme ve $P \neq \varnothing$ bir parametreler kümesi olsun.

$$F : P \to P(U)$$

dönüşümüne U üzerinde esnek küme denir ve (F,P) ile gösterilir. Farklı bir ifade ile U kümesinin parametrelendirilmiş bir alt ailesine U üzerinde esnek küme denir. (F,P) esnek kümesi her $\alpha \in P$ için $F(\alpha) \subset U$ kümeleri U'nun α-yaklaşımlı alt kümeleri olarak da alınabilir. Bu şekilde U üzerindeki (F,P) esnek kümesi

$$(F,P) = \{(\alpha, F(\alpha)) : \alpha \in P \ ve \ F(\alpha) \subset U\}$$

şeklinde ifade edilir.

P parametreler kümesi ile parametrelendirilmiş U üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi $S_P(U)$ ile gösterilir (Molodtsov, 1999: 19).

Tanım 2.1.2. $(F,P) \in S_P(U)$ bir esnek küme olmak üzere her $\alpha \in P$ için

- $F(\alpha) = \varnothing$ ise (F,P) kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.
- $F(\alpha) = U$ ise (F,P) kümesine mutlak esnek küme denir ve $\tilde{U}$ ile gösterilir (Maji vd., 2003: 558).

Tanım 2.1.3. (F,P) ve (G,P'), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. $P \subset P'$ ve her $\alpha \in P$ için $F(\alpha) \subset G(\alpha)$ ise (F,P) ye (G,P') esnek kümesinin esnek alt kümesidir denir ve $(F,P) \tilde{\subset} (G,P')$ ile gösterilir. (G,P') kümesine de (F,P) esnek kümesinin esnek üst kümesi denir ve $(G,P') \tilde{\supset} (F,P)$ ile gösterilir. (F,P)esnek kümesi**,** (G,P') esnek kümesinin esnek alt kümesi ve (G,P') esnek kümesi, (F,P) esnek kümesinin esnek alt kümesi ise (F,P) ve (G,P') kümelerine U üzerinde eşit esnek kümeler denir (Maji vd., 2003: 557; Ali vd., 2009: 1547; Babitha ve Sunil, 2010: 1840).

Tanım 2.1.4. (F,P) ve (G,P'), U kümesi üzerinde esnek kümeler $Q = P \cup P'$ ve $\alpha \in Q$ olsun.

$$H(\alpha) := \begin{cases} F(\alpha) & , \quad \alpha \in P - P' \\ G(\alpha) & , \quad \alpha \in P' - P \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & , \quad \alpha \in P \cap P' \end{cases}$$

olmak üzere (H,Q) esnek kümesine (F,P) ve (G,P') kümelerinin esnek birleşimi denir ve $(H,Q) \tilde{=} (F,P) \tilde{\cup} (G,P')$ ile gösterilir (Maji vd., 2003: 560; Ali vd., 2009: 1547; Babitha ve Sunil, 2010: 1840).

Tanım 2.1.5. (F,P) ve (G,P'), U kümesi üzerinde esnek kümeler $Q = P \cap P'$ olsun. Her $\alpha \in Q$ için $H(\alpha) = F(\alpha) \cap G(\alpha)$ olacak şekilde verilen (H,Q) esnek kümesine (F,P) ve (G,P') kümelerinin esnek kesişimi denir ve $(H,Q) \tilde{=} (F,P) \tilde{\cap} (G,P')$ ile gösterilir (Maji vd., 2003: 560; Ali vd., 2009: 1547; Babitha ve Sunil, 2010:1840).

Tanım 2.1.6. (F,P) ve (G,P'), U kümesi üzerinde esnek kümeler $Q = P / P'$ olsun. Her $\alpha \in Q$ için $H(\alpha) = F(\alpha) / G(\alpha)$ olacak şekilde verilen (H,Q) esnek kümesine (F,P) ve (G,P') kümelerinin esnek farkı denir ve $(H,Q) = (F,P) \tilde{/} (G,P')$ ile gösterilir (Maji vd., 2003: 557; Ali vd., 2009: 1547; Babitha ve Sunil, 2010: 1840).

Tanım 2.1.7. (F,P), U kümesi üzerinde esnek küme olsun. Her $\alpha \in P$ için $F^C(\alpha) = U - F(\alpha)$ şartını sağlayan $F^C : P \to P(U)$ dönüşümü ile verilen (F^C, P) esnek kümesine (F,P) kümesinin esnek tümleyeni denir ve $(F,P)^C = (F^C, P)$ ile gösterilir (Maji vd., 2003: 558; Ali vd., 2009: 1547; Babitha ve Sunil, 2010: 1840).

Önerme 2.1.1. $(F,P), (G,P)$ ve (H,P), U üzerinde esnek kümeler olsun.

1. $\left((F,P) \tilde{\cap} (G,P)\right)^C = (F,P)^C \tilde{\cup} (G,P)^C$,

2. $\left((F,P)\tilde{\cup}(G,P)\right)^C=(F,P)^C\tilde{\cap}(G,P)^C$,

3. $\left((F,P)\tilde{\cup}(G,P)\right)\tilde{\cap}(H,P)=\left((F,P)\tilde{\cap}(H,P)\right)\tilde{\cup}\left((G,P)\tilde{\cap}(H,P)\right)$,

4. $\left((F,P)\tilde{\cap}(G,P)\right)\tilde{\cup}(H,P)=\left((F,P)\tilde{\cup}(H,P)\right)\tilde{\cap}\left((G,P)\tilde{\cup}(H,P)\right)$ (Ali vd., 2009: 1547; Babitha ve Sunil, 2010: 1840).

2.2. Esnek Kümeler Üzerindeki Bağıntı Kavramına Genel Bakış

Tanım 2.2.1. (F,P) ve (G,P'), sırasıyla U ve V kümeleri üzerinde esnek kümeler olsun. Her $(\alpha,\beta)\in P^*\subseteq P\times P'$ için $H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\times G(\beta)$ şartını sağlayan $H:P^*\to P(U\times V)$ dönüşümü ile verilen $(H,P^*)=(F,P)\tilde{\times}(G,P')$ esnek kümesine (F,P) ile (G,P') kümelerinin esnek kartezyen çarpımı denir (Qin vd., 2015: 822).

Tanım 2.2.2. (F,P) ve (G,P'), sırasıyla U ve V kümeleri üzerinde esnek kümeler olmak üzere $(F,P)\tilde{\times}(G,P')$ esnek kartezyen çarpım kümesinin bir R esnek alt kümesine esnek küme bağıntısı denir. Eğer R, $(F,P)\tilde{\times}(F,P)$'nin bir esnek alt kümesi ise R'ye (F,P) üzerinde bir esnek küme bağıntısı denir (Qin vd., 2015: 822).

(Qin vd., 2015: 822)'de verilen esnek küme bağıntısından önce (Babitha ve Sunil, 2010: 1840)'da kartezyen çarpım ve esnek küme bağıntısının tanımları aynı U evreni üzerinde ele alınmıştır. Buradaki tanımdan hareketle esnek küme bağıntıları üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır (Babitha ve Sunil, 2011: 2235; Park vd., 2012:1079; Yang ve Guo, 2011: 651). Ayrıca, bu çalışmaları temel alarak, esnek küme bağıntısı topoloji ve hibrit esnek kümelere aktarılmıştır (Alhazaymeh ve Hassan, 2015: 1205; Dalkılıç, 2021: 1; Karaaslan, 2016: 105; Qamar ve Hassan, 2018: 1; Yaylalı vd. 2017: 81).

Örnek 2.2.1. $U=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$ ve $V=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$, sırasıyla bir topluluktaki insanların kümesi ve bir bölgedeki evlerin kümesi olsun. Ayrıca

$$P=\{\alpha_1=\text{doktor},\alpha_2=\text{mühendis},\alpha_3=\text{öğretmen}\},$$

U kümesi için parametreler kümesi ve

$$P'=\{\beta_1=\text{ahşap},\beta_2=\text{betonarme},\beta_3=\text{bahçeli}\},$$

V kümesi için parametreler kümesi olsun.

Topluluktaki insanların mesleklerine göre sınıflandırılması

$$(F,P)=\{(\alpha_1,\{p_1\}),(\alpha_2,\{p_3,p_5\}),(\alpha_3,\{p_2,p_4\})\}$$

esnek kümesi ile tanımlanır. Evlerin özelliklerine göre sınıflandırılması da

$$(G,P')=\{(\beta_1,\{h_1,h_3\}),(\beta_2,\{h_2,h_4,h_5\}),(\beta_3,\{h_1,h_5\})\}$$

esnek kümesi ile tanımlanır.

Bu durumda, $P^*=\{(\alpha_1,\beta_2),(\alpha_1,\beta_3),(\alpha_2,\beta_1)\}\subseteq P\times P'$ olmak üzere topluluktaki insanların mesleklerine ve evlerin özelliklerine göre kişilerin satın almak için ev tercihleri $(F,P)\tilde{\times}(G,P')$ esnek kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi olan

$$(H,P^*)=\{((\alpha_1,\beta_2),\{(p_1,h_2),(p_1,h_5)\}),((\alpha_1,\beta_3),\{(p_1,h_5)\}),((\alpha_2,\beta_1),\{(p_3,h_1),(p_5,h_3)\})\}$$

esnek küme bağıntısı ile tanımlanır (Qin vd., 2015: 822; Babitha ve Sunil, 2010:1840).

Tanım 2.2.3. $\rho: P\to P(U\times U)$ olacak şekilde $U\times U$ üzerindeki (ρ,P) esnek kümesine bir esnek bağıntı denir. Burada bir esnek bağıntı, U kümesi üzerindeki klasik bağıntıların parametrelendirilmiş bir ailesini verir (Feng vd., 2013: 1183).

(Feng vd., 2013: 1183)'de verilen tanımdan hareketle, esnek bağıntı, cebirsel yapılar ve hibrit esnek kümelere aktarılmıştır (Kanwal ve Shabir, 2019: 1; Kanwal vd., 2020: 1).

Yukarıda esnek kümeler üzerindeki bağıntılar ile ilgili bahsedilen çalışmalar dışında, bir U kümesi üzerindeki kısmi sıralama bağıntısını kullanarak veya U'daki bir elemanın parametreye karşılık gelen kümeye ait olma bağıntısını inceleyerek esnek kümeler üzerindeki topolojik yapılar çalışılmıştır (Al-Shami vd., 2019: 556; Al-Shami ve Shafei, 2020: 8; El-Shafei ve Al-shami, 2020: 1).

Tanım 2.2.4. (Al-Shami vd., 2019: 556) U evrensel kümesi üzerindeki bir (F,P) esnek kümenin bir esnek noktası, bir $\alpha\in P$ parametresi ve bir $x\in U$ elemanı için $x\in F(\alpha)$ olması ile belirlenir ve P_α^x ile gösterilir.

(Qin vd., 2015: 822; Feng vd., 2013: 1183)'de verilen esnek bağıntı tanımları ile ilgili çalışmalar ve diğerlerinde bir esnek kümenin bir esnek elemanı (Al-Shami vd., 2019: 556)'deki tanıma göre belirlenmiştir. Bu tanımdan farklı olarak Das ve Samanta yeni bir esnek elemanı tanımı yaparak elemanter esnek küme işlemlerini tanıtmışlardır (Das ve

Samanta, 2012: 551). Burada bir esnek eleman, sadece bir parametreye tek bir nokta karşılık getirilerek değil her bir parametreye bir nokta karşılık getirilecek şekilde değerlendirilmiştir.

2.3. Esnek Eleman ve Elemanter Esnek Küme İşlemleri

Tanım 2.3.1. $U \neq \varnothing$ küme ve P parametreler kümesi olsun $\varepsilon : P \to U$ fonksiyonuna U üzerinde bir esnek eleman denir. Bir $(F,P) \in S_P(U)$ esnek kümesi verildiğinde her $\alpha \in P$ için $\varepsilon(\alpha) \in F(\alpha)$ ise ε esnek elemanı (F,P) kümesine aittir denir ve $\varepsilon \tilde{\in} (F,P)$ şeklinde gösterilir.

Her $\alpha \in P$ için $F(\alpha) \subset U$ tek elemanlı bir küme ise (F,P) kümesine tek elemanlı esnek küme denir. Bu şekilde her tek elemanlı esnek küme aynı zamanda bir esnek elemana karşılık gelir.

Her $\alpha \in P$ için $F(\alpha) \neq \varnothing$ olacak şekilde U üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler ile Φ boş esnek kümenin oluşturduğu sınıf $S(\tilde{U})$ ile gösterilir. $(F,P) \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin tüm esnek elemanlarının bir sınıfı da $SE((F,P))$ ile gösterilir (Das ve Samanta, 2012: 551).

Tezin bundan sonraki kısmında bir $P \neq \varnothing$ parametreler kümesi ile çalışılacağı için esnek kümenin gösteriminde (F,P) yerine kolaylık için sadece F ve esnek elemanlar için $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}...$ gösterimi kullanılmıştır.

Tanım 2.3.2. Bir $F \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin esnek elemanlarının bir sınıfı bu esnek kümenin bir esnek alt kümesini üretir. $\mathfrak{B}$ sınıfı $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir sınıfı olmak üzere $\mathfrak{B}$ sınıfının ürettiği esnek küme

$$SS(\mathfrak{B}) = \left\{ (\alpha, F(\alpha)) : \forall \alpha \in P, F(\alpha) = \bigcup_{\tilde{x} \in \mathfrak{B}}^{n} \{\tilde{x}(\alpha)\} \right\}$$

olarak tanımlanır (Das ve Samanta, 2013: 707).

Önerme 2.3.1. Herhangi $F \in S(\tilde{U})$ esnek kümesi için $SS(SE(F)) = F$ olur. Fakat $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesinin esnek elemanlarının bir $\mathfrak{B}$ sınıfı için $SE(SS(\mathfrak{B})) \supseteq \mathfrak{B}$ olur (Das ve Samanta, 2013: 707).

Uyarı 2.3.1. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subset SE(\tilde{U})$ olmak üzere $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ olsun. Her $\alpha \in P$ için $\mathfrak{B}_1(\alpha) = \mathfrak{B}_2(\alpha)$ ise $SS(\mathfrak{B}_1) = SS(\mathfrak{B}_2)$ olur (Taşköprü, 2017: 8).

Örnek 2.3.1. $P = \{\alpha, \beta\}$ ve $U = \{u, v, w\}$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{e}_1 = \{(\alpha,u),(\beta,u)\}, \quad \tilde{e}_4 = \{(\alpha,u),(\beta,v)\}, \quad \tilde{e}_7 = \{(\alpha,v),(\beta,w)\},$$

$$\tilde{e}_2 = \{(\alpha,v),(\beta,v)\}, \quad \tilde{e}_5 = \{(\alpha,u),(\beta,w)\}, \quad \tilde{e}_8 = \{(\alpha,w),(\beta,u)\},$$

$$\tilde{e}_3 = \{(\alpha,w),(\beta,w)\}, \quad \tilde{e}_6 = \{(\alpha,v),(\beta,u)\}, \quad \tilde{e}_9 = \{(\alpha,w),(\beta,v)\}.$$

olmak üzere $SE(\tilde{U}) = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_9\}$ olur. $\mathfrak{B}_1 = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5\}$ ve $\mathfrak{B}_3 = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_6\}$ eleman sınıfları ele alınırsa

$$F = SS(\mathfrak{B}_1) = SS(\mathfrak{B}_3) = \{(\alpha,\{u,v\}),(\beta,\{u,v\})\},$$

$$G = SS(\mathfrak{B}_2) = \{(\alpha,\{u,v\}),(\beta,\{u,v,w\})\}$$

olduğu görülür. Buradan $SE(F) = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_6\}$ ve $SE(G) = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6, \tilde{e}_7\}$ olup $\mathfrak{B}_1 \subset SE(F)$, $\mathfrak{B}_2 \subset SE(G)$ ve $\mathfrak{B}_3 = SE(F)$ elde edilir (Taşköprü, 2017: 8).

Önerme 2.3.2. Herhangi $F, G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için F esnek kümesinin her esnek elemanı G esnek kümesinin de esnek elemanı ise $F \tilde{\subseteq} G$ olur (Das ve Samanta, 2013: 707).

Örnek 2.3.2. Örnek 2.3.1. üzerinden $H = \{(\alpha,\{u,w\}),(\beta,\{w\})\} \in S(\tilde{U})$ ve $K = \{(\alpha,\{u,v,w\}),(\beta,\{v,w\})\} \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. Buradan $K^C = \{(\alpha,\varnothing),(\beta,\{u\})\} \notin S(\tilde{U})$ olur ve $F \tilde{\cup} H = \{(\alpha,\{u,v,w\}),(\beta,\{u,v,w\})\}$ olup $\tilde{e}_7 \tilde{\in} F \tilde{\cup} H$ olmasına rağmen $\tilde{e}_7 \tilde{\notin} F$ ve $\tilde{e}_7 \tilde{\notin} H$ olur. Ayrıca $F \tilde{\cap} H = \{(\alpha,\{u\}),(\beta,\varnothing)\} \notin S(\tilde{U})$ olur (Taşköprü, 2017: 9).

Uyarı 2.3.2. $F, G \in S(\tilde{U})$ verilsin.

1. $\tilde{e} \tilde{\in} F \tilde{\cup} G$ ise $\tilde{e} \tilde{\in} F$ veya $\tilde{e} \tilde{\in} G$ olması gerekmez.

2. F,G esnek kümelerinin esnek kesişimlerinin veya esnek tümleyenlerinin $S(\tilde{U})$ sınıfına ait olması gerekmez (Das ve Samanta, 2013: 707).

Tanım 2.3.3. $F,G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{e} \,\tilde{\in}\, \tilde{U} : \tilde{e} \,\tilde{\in}\, F \text{ veya } \tilde{e} \,\tilde{\in}\, G \right\}$ olmak üzere $F \Cup G = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine F ile G esnek kümelerinin elemanter birleşimi denir. Başka bir ifade ile $F \Cup G = SS(SE(F) \cup SE(G))$ olarak tanımlanır (Taşköprü, 2017: 10).

Tanım 2.3.4. $F,G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{e} \,\tilde{\in}\, \tilde{U} : \tilde{e} \,\tilde{\in}\, F \text{ ve } \tilde{e} \,\tilde{\in}\, G \right\}$ olmak üzere $F \Cap G = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine F ile G esnek kümelerinin elemanter kesişimi denir. Başka bir ifade ile $F \Cap G = SS(SE(F) \cap SE(G))$ olarak tanımlanır (Taşköprü, 2017: 10).

Tanım 2.3.5. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{e} \,\tilde{\in}\, \tilde{U} : \tilde{e} \,\tilde{\in}\, F^{C} \right\}$ için $F^{\mathbb{C}} = SS(\mathfrak{B})$ ifadesine $F \in S(\tilde{U})$ esnek kümesinin elemanter tümleyeni denir. Başka bir ifade ile $F^{\mathbb{C}} = SS\left(SE\left(F^{C}\right)\right)$ olarak tanımlanır (Taşköprü, 2017: 10).

Tanım 2.3.6. $F,G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. $\mathfrak{B} = \left\{ \tilde{e} \,\tilde{\in}\, \tilde{U} : \tilde{e} \,\tilde{\in}\, F \,\tilde{\setminus}\, G \right\}$ olmak üzere $F \setminus G = SS(\mathfrak{B})$ esnek kümesine $F,G \in S(\tilde{U})$ esnek kümelerinin elemanter farkı denir. Başka bir ifade ile $F \setminus G = SS\left(SE\left(F \,\tilde{\setminus}\, G\right)\right)$ olarak tanımlanır (Taşköprü, 2017: 10).

Örnek 2.3.3. $P = \{\alpha, \beta\}$ parametreler kümesi ile $U = \{u, v, w\}$ kümesi üzerinde $F = \{(\alpha, \{u, v\}), (\beta, \{u, v, w\})\}$ ve $G = \{(\alpha, \{u, w\}), (\beta, \{v,\})\} \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri verilsin. Bu durumda

$$\tilde{e}_1 = \{(\alpha,u),(\beta,u)\}, \qquad \tilde{e}_4 = \{(\alpha,u),(\beta,v)\}, \qquad \tilde{e}_7 = \{(\alpha,v),(\beta,w)\},$$

$$\tilde{e}_2 = \{(\alpha,v),(\beta,v)\}, \qquad \tilde{e}_5 = \{(\alpha,u),(\beta,w)\}, \qquad \tilde{e}_8 = \{(\alpha,w),(\beta,u)\},$$

$$\tilde{e}_3 = \{(\alpha,w),(\beta,w)\}, \qquad \tilde{e}_6 = \{(\alpha,v),(\beta,u)\}, \qquad \tilde{e}_9 = \{(\alpha,w),(\beta,v)\}.$$

olmak üzere $SE(\tilde{U}) = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_9\}$, $SE(F) = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6, \tilde{e}_7\}$ ve $SE(G) = \{\tilde{e}_4, \tilde{e}_9\}$ olur.

Böylece F ve G esnek kümelerinin elemanter esnek birleşimi;

$$F \Cup G = SS\left(SE(F) \cup SE(G)\right)$$

$$= SS\left(\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6, \tilde{e}_7\} \cup \{\tilde{e}_4, \tilde{e}_9\}\right)$$

$$= SS\left(\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6, \tilde{e}_7, \tilde{e}_9\}\right)$$

$$= \left\{\left(\alpha, \{u, v, w\}\right), \left(\beta, \{u, v, w\}\right)\right\}$$

olur. F ve G esnek kümelerinin elemanter esnek kesişimi;

$$F \Cap G = SS\left(SE(F) \cap SE(G)\right)$$

$$= SS\left(\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5, \tilde{e}_6, \tilde{e}_7\} \cap \{\tilde{e}_4, \tilde{e}_9\}\right)$$

$$= SS\left(\{\tilde{e}_4\}\right) = \left\{\left(\alpha, \{u\}\right), \left(\beta, \{v\}\right)\right\}$$

olur. G kümesinin elemanter esnek tümleyeni;

$$G^{\mathbb{C}} = SS\left(SE\left(G^{C}\right)\right)$$

$$= SS\left(SE\left(\left\{\left(\alpha, \{v\}\right), \left(\beta, \{u, w\}\right)\right\}\right)\right)$$

$$= SS\left(\{\tilde{e}_6, \tilde{e}_7\}\right) = \left\{\left(\alpha, \{v\}\right), \left(\beta, \{u, w\}\right)\right\}$$

G ve F esnek kümelerinin elemanter esnek farkı;

$$G \setminus F = SS\left(SE\left(G \tilde{\setminus} F\right)\right)$$

$$= SS\left(SE\left(\left(\alpha, \{w\}\right), \left(\beta, \varnothing\right)\right)\right)$$

$$= SS(\varnothing) = \Phi$$

olur.

Önerme 2.3.3. $F, G \in S\left(\tilde{U}\right)$ iki esnek küme olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1. $F \Cup G = F \tilde{\cup} G,$

2. $F \Cap F^{C} = \Phi,$

3. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\Cup_{i\in I} F_i = SS\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i\right)$,

4. $F \Cap G \tilde{\subseteq} F \tilde{\cap} G$,

5. $F^{\mathbb{C}} \tilde{\subseteq} F^{C}$,

6. $F \setminus G \tilde{\subseteq} F \tilde{\setminus} G$,

7. $F \Cap F^{\mathbb{C}} \tilde{\subseteq} \tilde{U}$,

8. Her $i \in I$ için $F_i = SS(\mathfrak{B}_i)$ ise $\Cap_{i\in I} F_i \tilde{\supseteq} SS\left(\bigcap_{i=1} \mathfrak{B}_i\right)$ (Das ve Samanta, 2013: 707; Taşköprü, 2017: 10).

Uyarı 2.3.3. Herhangi $F, G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için $F \Cap G = \Phi$ olması $F \tilde{\subset} G^{\mathbb{C}}$ ve $G \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}}$ olmasını gerektirmez. Fakat $F \Cap G = \Phi$ ve $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{U})$ ise $F \tilde{\subset} G^{\mathbb{C}}$ ve $G \tilde{\subset} F^{\mathbb{C}}$ olur (Taşköprü, 2017: 12).

Önerme 2.3.4. Herhangi $F, G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $SE(F \Cap G) = SE(F) \cap SE(G)$,

2. $SE(F \Cup G) \supset SE(F) \cup SE(G)$,

3. $(F \Cap G) \Cup H \tilde{\subseteq} (F \Cup H) \Cap (G \Cup H)$,

4. $(F \Cup G) \Cap H \tilde{\supseteq} (F \Cap H) \Cup (G \Cap H)$ (Taşköprü, 2017: 13).

Önerme 2.3.5. Elemanter birleşim ve elemanter kesişim işlemleri aşağıdaki koşullarla dağılma özelliğine sahiptirler. $F, G, H \in S(\tilde{U})$ olmak üzere,

- $F \tilde{\cap} G \in S(\tilde{U})$ ise $(F \Cap G) \Cup H = (F \Cup H) \Cap (G \Cup H)$,
- $F \tilde{\cap} H \in S(\tilde{U})$ ve $G \tilde{\cap} H \in S(\tilde{U})$ ise $(F \Cup G) \Cap H = (F \Cap H) \Cup (G \Cap H)$ olur (Taşköprü, 2017: 14).

Önerme 2.3.6. Herhangi $F, G \in S(\tilde{U})$ esnek kümeleri için aşağıdakiler sağlanır.

1. $F^{C} \Cap G^{C} \neq \Phi$ ise $(F \Cup G)^{C} = F^{C} \Cap G^{C}$,

2. $\left(F \Cap G\right)^{C} \neq \Phi$ ise $\left(F \Cap G\right)^{C} = F^{C} \Cup G^{C}$,

3. $F^{C} \Cap G^{C} \neq \Phi$, $F^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ve $G^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $\left(F \Cup G\right)^{\mathbb{C}} = F^{\mathbb{C}} \Cap G^{\mathbb{C}}$,

4. $F \Cap G \neq \Phi$, $F^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ve $G^{\mathbb{C}} \neq \Phi$ ise $\left(F \Cap G\right)^{\mathbb{C}} = F^{\mathbb{C}} \Cup G^{\mathbb{C}}$ olur (Taşköprü, 2017: 15).

Uyarı 2.3.4. Yukarıdaki önermelerde görüldüğü gibi elemanter işlemler dağılma özelliğini ve De Morgan kurallarını genelde sağlamaz. Eğer verilen esnek kümelerin esnek kesişimleri, esnek tümleyenleri ve esnek tümleyenlerinin esnek kesişimleri $S\left(\tilde{U}\right)$ sınıfına ait ise dağılma özelliği ve De Morgan kuralları elemanter işlemler için de sağlanır (Taşköprü, 2017: 17).

3. ESNEK BAĞINTI

Bu kısımda esnek kümeler üzerindeki bağıntıya yeni bir yaklaşım sunulmuştur. (Qin vd., 2015: 822; Feng vd., 2013: 1183)'deki tanımlarda esnek kümeler üzerindeki bağıntılar aslında birer esnek kümeye karşılık gelmekte iken burada (Das ve Samanta, 2012: 551)'deki esnek eleman kavramını temel alarak, bir esnek bağıntı esnek eleman sınıflarının kartezyen çarpımının bir alt sınıfı olarak tanımlanmıştır. Esnek bağıntının özellikleri genel olarak klasik bağıntıya benzer şekilde verilmiş ve fark oluşturan durumlara değinilmiştir. Ayrıca, klasik bağıntılar ile esnek bağıntı arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Tanım 3.1. $U \neq \varnothing$ ve $V \neq \varnothing$ iki evrensel küme ve P bir parametreler kümesi olmak üzere $SE(\tilde{U}) \times SE(\tilde{V})$ kartezyen çarpım kümesinin bir alt sınıfına $\tilde{U}$ 'dan $\tilde{V}$ 'ya bir esnek bağıntı denir ve $\tilde{U}$ üzerindeki bir esnek bağıntı aşağıdaki şekilde

$$\mathcal{R} = \left\{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x}, \tilde{y} \in SE(\tilde{U})\right\} \subseteq SE(\tilde{U}) \times SE(\tilde{U})$$

ile tanımlanır. $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ikilisinin $\mathcal{R}$ esnek bağıntısına ait olması $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}$ veya $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.1. Herhangi bir U kümesi üzerindeki her parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi $\tilde{U}$ üzerinde bir esnek bağıntı ve $\tilde{U}$ üzerindeki her esnek bağıntı U kümesi üzerinde bir parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi belirtir.

İspat. Her $\alpha \in P$ için U üzerindeki parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi $\{R_\alpha : \alpha \in P\}$ şeklinde verilsin. Buradan $\tilde{U}$ üzerindeki bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı her $\alpha \in P$ parametresi için U üzerindeki

$$\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}_\alpha = \left\{(\tilde{x}, \tilde{y})(\alpha) = (\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha)) \in R_\alpha : \tilde{x}, \tilde{y} \in SE(\tilde{U})\right\}$$

klasik bağıntılarına karşılık gelecek şekilde yazılır.

Diğer taraftan $\mathcal{R},\ \tilde{U}$ üzerinde bir esnek bağıntı ise her $\alpha \in P$ parametresi için

$$\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}_\alpha = \left\{(\tilde{x}, \tilde{y})(\alpha) = (\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha)) : \tilde{x}, \tilde{y} \in SE(\tilde{U})\right\}$$

kümeleri U üzerinde bir klasik bağıntıya karşılık gelir ve $\{\mathcal{R}_\alpha : \alpha \in P\}$ parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi olur.

Ayrıca R, U üzerinde klasik bağıntı olmak üzere $\tilde{U}$ üzerindeki bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı her $\alpha \in P$ için $\mathcal{R}_\alpha = R$ olacak şekilde bulunabilir. Bu şekildeki $\mathcal{R}$ esnek bağıntısına R klasik bağıntısı tarafından üretilen esnek bağıntı denir.

Uyarı 3.1. Herhangi bir $G \in S\left(\tilde{U}\right)$ esnek kümesi verilsin. Eğer $\mathcal{R}$, G üzerinde bir esnek bağıntı ise Önerme 3.1'dekine benzer şekilde $\{\mathcal{R}_\alpha : \alpha \in P\}$ ailesi U üzerinde parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi olur. Fakat, her $\alpha \in P$ için U üzerindeki parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi $\{R_\alpha : \alpha \in P\}$ verildiğinde bazı $\tilde{x}, \tilde{y} \in SE(G)$ ve bazı $\alpha \in P$ için $(\tilde{x},\tilde{y})(\alpha) = \left(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha)\right) \notin R_\alpha$ olabilir. Bu durumda her $\tilde{x} \in SE(G)$ esnek elemanı P'den U'ya birer fonksiyon olduğundan her $\alpha \in P$ için $R_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha \in P} G(\alpha) \times \bigcap_{\alpha \in P} G(\alpha)$ olacak şekilde $\{R_\alpha : \alpha \in P\}$ ailesi verildiğinde

$$\mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}_\alpha = \left\{(\tilde{x},\tilde{y})(\alpha) = \left(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha)\right) \in R_\alpha : \tilde{x}, \tilde{y} \in SE(G)\right\}$$

ile birlikte $\tilde{U}$ üzerindeki bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı elde edilir.

Örnek 3.1. Bir X kişisi bir veri tabanından, belirli verileri içeren bir belgeyi ve onun ilgili olduğu diğer belgeleri aramayı, belirlediği ölçütler ile yapmak istiyor. $U = \{u, v, w\}$, veri kümesi ve $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, verilerin arama ölçütlerini belirten parametreler kümesi olsun.

$SE\left(\tilde{U}\right) = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, ..., \tilde{e}_{27}\}$ olmak üzere

$\tilde{e}_1 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,u),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_2 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,u),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_3 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,u),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_4 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,v),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_5 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,v),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_6 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,v),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_7 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,w),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_8 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,w),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_9 = \{(\alpha_1,u),(\alpha_2,w),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_{10} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,u),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_{11} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,u),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_{12} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,u),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_{13} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,v),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_{14} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,v),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_{15} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,v),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_{16} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,w),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_{17} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,w),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_{18} = \{(\alpha_1,v),(\alpha_2,w),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_{19} = \{(\alpha_1,w),(\alpha_2,u),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_{20} = \{(\alpha_1,w),(\alpha_2,u),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_{21} = \{(\alpha_1,w),(\alpha_2,u),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_{22}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,v),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_{23}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,v),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_{24}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,v),(\alpha_3,w)\}$,

$\tilde{e}_{25}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,w),(\alpha_3,u)\}$, $\tilde{e}_{26}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,w),(\alpha_3,v)\}$, $\tilde{e}_{27}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,w),(\alpha_3,w)\}$

esnek elemanlarının her biri ölçütleri sağlayan verileri içeren bir belgeye karşılık gelir.

Her bir ölçüte göre verilerin birbirleri ile ilişkileri

$$R_1=\{(u,v),(u,w)\},$$

$$R_2=\{(u,v),(u,w),(v,w)\},$$

$$R_3=\{(v,u),(w,u)\}$$

bağıntılarından biri ile verilsin.

Bu durumda X kişisinin kullanmış olduğu veri tabanın arama ölçütlerine göre sağlayabileceği belgeler ve birbirleri ile ilişkileri

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(123)}=\{&(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{25}),\\&(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{25}),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_{25}),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{25})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(132)}=\{&(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{12}),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_{12}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{12}),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_{12}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{20}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{21}),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_{21}),\\&(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{20}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{21}),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_{21})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(231)}=\{&(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{12}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{12}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{20}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{21}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{20}),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_{21}),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{20}),\\&(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{21}),(\tilde{e}_{16},\tilde{e}_{20}),(\tilde{e}_{16},\tilde{e}_{21})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(213)}=\{&(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{25}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{25}),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_{22}),\\&(\tilde{e}_{12},\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_{25}),(\tilde{e}_{12},\tilde{e}_{25})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(312)}=\{&(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_5),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_5),(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{20},\tilde{e}_6),\\&(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{20},\tilde{e}_9)\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}^{(113)}=\{(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{22}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{25}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{25})\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(322)}=\{&(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_5),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{14},\tilde{e}_9),\\&(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_5),(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{20},\tilde{e}_6),(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{19},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{20},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{22},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{22},\tilde{e}_9),(\tilde{e}_{23},\tilde{e}_9)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(323)}=\{&(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_4),(\tilde{e}_{12},\tilde{e}_4),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_7),(\tilde{e}_{12},\tilde{e}_7),(\tilde{e}_{14},\tilde{e}_7),(\tilde{e}_{15},\tilde{e}_7),(\tilde{e}_{20},\tilde{e}_4),(\tilde{e}_{21},\tilde{e}_4),(\tilde{e}_{20},\tilde{e}_7),\\&(\tilde{e}_{21},\tilde{e}_7),(\tilde{e}_{23},\tilde{e}_7),(\tilde{e}_{24},\tilde{e}_7)\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}^{(1)}=\{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{14}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{15}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{17}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{18}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{23}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{24}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{26}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{27})\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(2)}=\{&(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{14}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{15}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{15}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{17}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{18}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{18}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{17}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{18}),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_{18}),\\&(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{23}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{24}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{24}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{26}),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_{27}),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_{27}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{26}),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_{27}),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_{27}),\\&(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_{23}),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_{24}),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_{24}),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_{26}),(\tilde{e}_{10},\tilde{e}_{27}),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_{27}),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{26}),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{27}),\\&(\tilde{e}_{14},\tilde{e}_{27})\}\end{aligned}$$

gibi esnek bağıntılarından herhangi biri ile tanımlanır. Burada $\mathcal{R}^{(123)}$ notasyonu ile verilen esnek bağıntı, α_1, α_2 ve α_3 paremetreleri için sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 klasik bağıntıları kullanılarak üretilen esnek bağıntıdır ve aynı notasyona sahip diğer esnek bağıntılar da benzer şekilde elde edilmiştir. Örneğin,

$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16})(\alpha_1)=(\tilde{e}_6(\alpha_1),\tilde{e}_{16}(\alpha_1))=(u,v)\in R_1$

$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16})(\alpha_2)=(\tilde{e}_6(\alpha_2),\tilde{e}_{16}(\alpha_2))=(v,w)\in R_2$

$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16})(\alpha_3)=(\tilde{e}_6(\alpha_3),\tilde{e}_{16}(\alpha_3))=(w,u)\in R_3$ olduğundan $(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16})\in\mathcal{R}^{(123)}$ olur. Fakat

$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{17})(\alpha_1)=(\tilde{e}_6(\alpha_1),\tilde{e}_{17}(\alpha_1))=(u,v)\in R_1$

$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{17})(\alpha_2)=(\tilde{e}_6(\alpha_2),\tilde{e}_{17}(\alpha_2))=(v,w)\in R_2$ olmasına rağmen

$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{17})(\alpha_3)=(\tilde{e}_6(\alpha_3),\tilde{e}_{17}(\alpha_3))=(w,v)\notin R_3$ olduğundan $(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{17})\notin\mathcal{R}^{(123)}$ olur. Ek olarak $\mathcal{R}^{(1)}$ notasyonu ile verilen esnek bağıntı, α_1, α_2 ve α_3 parametreleri için R_1 klasik bağıntısı kullanılarak üretilmiştir ve aynı notasyona sahip diğer esnek bağıntılar da benzer şekilde elde edilmiştir.

Eğer X kişisinin ölçütlerine göre yapmış olduğu aramaya karşılık gelen veriler $G=\{(\alpha_1,\{u,v\}),(\alpha_2,\{u,v,w\}),(\alpha_3,\{u,w\})\}$ gibi bir esnek küme ile verilmiş olsaydı $SE(G)=\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4,\tilde{e}_6,\tilde{e}_7,\tilde{e}_9,\tilde{e}_{10},\tilde{e}_{12},\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{15},\tilde{e}_{16},\tilde{e}_{18}\}$ olup örneğin; her $i,j=1,2,3$ için $(\tilde{e}_7,\tilde{e}_9)(\alpha_i)=(\tilde{e}_3(\alpha_i),\tilde{e}_9(\alpha_i))\notin R_j$ olduğundan R_1, R_2 ve R_3 klasik bağıntılarından üretilen herhangi bir esnek bağıntı, G üzerindeki bir esnek bağıntıya karşılık gelemez. Dolayısıyla arama sonucuna karşılık gelecek olan belgeler arasındaki ilişkilere ulaşılamaz.

3.1. Esnek Bağıntının Özellikleri

Tanım 3.1.1. P parametreler kümesi ile herhangi $\tilde{U}$ üzerinde bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı verilsin. Her $\tilde{x},\tilde{y} \in SE(\tilde{U})$ için,

- $(\tilde{x},\tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı yansıyandır denir.
- $(\tilde{x},\tilde{x}) \notin \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı yansımasızdır denir.
- $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\tilde{y},\tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı simetriktir denir.
- $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\tilde{y},\tilde{x}) \notin \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı asimetriktir denir.
- $(\tilde{x},\tilde{y}),(\tilde{y},\tilde{x}) \in \mathcal{R} \Rightarrow \tilde{x}=\tilde{y}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı ters simetriktir denir.
- $(\tilde{x},\tilde{y}),(\tilde{y},\tilde{z}) \in \mathcal{R} \Rightarrow (\tilde{x},\tilde{z}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı geçişlidir denir.
- $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{R}$ veya $(\tilde{y},\tilde{x}) \in \mathcal{R}$ ise $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı tamdır denir.

Yukarıdaki özelliklere bağlı olarak bazı bağıntı türleri aşağıda verilmiştir.

- Yansıyan ve geçişli esnek bağıntıya **esnek ön sıralama bağıntısı** denir.
- Yansıyan, geçişli ve tam esnek bağıntıya **esnek tam ön sıralama bağıntısı** denir.
- Yansıyan, geçişli ve ters simetrik esnek bağıntıya **esnek kısmi sıralama bağıntısı** denir.
- Geçişli, tam ve ters simetrik esnek bağıntıya **esnek tam sıralama bağıntısı** denir.
- Yansımasız, geçişli ve asimetrik esnek bağıntıya **esnek doğrusal sıralama bağıntısı** denir.
- Yansıyan, geçişli ve simetrik esnek bağıntıya **esnek denklik bağıntısı** denir.

Önerme 3.1.1. Her yansıyan, yansımasız, simetrik, asimetrik, ters simetrik ve geçişli parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi, sırasıyla yansıyan, yansımasız, simetrik, asimetrik, ters simetrik ve geçişli esnek bağıntı olarak nitelendirilir.

İspat. Önerme 3.1.'den kolaylıkla görülür.

Örnek 3.1.1. $P=\{\alpha,\beta\}$, $U=\{u,v,w\}$ ve $SE(\tilde{U})=\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\tilde{e}_4,\tilde{e}_5,\tilde{e}_6,\tilde{e}_7,\tilde{e}_8,\tilde{e}_9\}$ için

$\tilde{e}_1=\{(\alpha,u),(\beta,u)\}$, $\quad \tilde{e}_4=\{(\alpha,v),(\beta,u)\}$, $\quad \tilde{e}_7=\{(\alpha,w),(\beta,u)\}$,

$\tilde{e}_2=\{(\alpha,u),(\beta,v)\}$, $\quad \tilde{e}_5=\{(\alpha,v),(\beta,v)\}$, $\quad \tilde{e}_8=\{(\alpha,w),(\beta,v)\}$,

$\tilde{e}_3=\{(\alpha,u),(\beta,w)\}, \qquad \tilde{e}_6=\{(\alpha,v),(\beta,w)\}, \qquad \tilde{e}_9=\{(\alpha,w),(\beta,w)\}$

olmak üzere

$R_1=\{(u,u),(v,v)(w,w),(u,v)\},$

$R_2=\{(u,u),(v,v)(w,w),(u,v),(v,u)\}$

klasik bağıntıları tanımlansın. Bağıntılarının özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Yansımalı	Yansımasız	Simetrik	Ters simetrik	Asimetrik	Geçişli	Tam
R_1	✓	×	×	✓	×	✓	×
R_2	✓	×	✓	×	×	✓	×

$\{R_1,R_2\}$ klasik bağıntılar ailesi yardımıyla bu bağıntılar parametrelere karşılık getirerek aşağıdaki esnek bağıntılar elde edilir.

$$\mathcal{R}^{(12)}=\{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),...,(\tilde{e}_9,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_6),$$
$$(\tilde{e}_4,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_7)\}$$

$$\mathcal{R}^{(21)}=\{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),...,(\tilde{e}_9,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_5),,(\tilde{e}_3,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_2),$$
$$(\tilde{e}_4,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_8)\}$$

Ayrıca R_1 ve R_2 klasik bağıntılarının ürettiği esnek bağıntılar da aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathcal{R}^{(1)}=\{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),...,(\tilde{e}_9,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_8)\}$$

$$\mathcal{R}^{(2)}=\{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),...,(\tilde{e}_9,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_6),$$
$$(\tilde{e}_4,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_7)\}$$

Burada $\mathcal{R}^{(12)}$ ve $\mathcal{R}^{(21)}$ notasyonu ile verilen esnek bağıntılar α ve β paremetreleri için sırasıyla $R_1(R_2)$ ve $R_2(R_1)$ bağıntıları kullanılarak üretilen esnek bağıntılardır. Ek olarak $\mathcal{R}^{(1)}\left(\mathcal{R}^{(2)}\right)$ esnek bağıntısı α ve β parametrelerine karşılık $R_1(R_2)$ klasik bağıntısı ile üretilmiştir. Yukarıda elde edilen esnek bağıntıların özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Yansımalı	Yanısmasız	Simetrik	Ters simetrik	Asimetrik	Geçişli	Tam
$\mathcal{R}^{(12)}$	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗
$\mathcal{R}^{(21)}$	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗
$\mathcal{R}^{(1)}$	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✗
$\mathcal{R}^{(2)}$	✓	✗	✓	✗	✗	✓	✗

Yukarıdaki klasik bağıntılardan farklı olarak

$$R_1 = \{(u,u),(v,v),(w,w),(v,u),(v,w),(u,w)\},$$

$$R_2 = \{(u,v),(v,w),(w,u)\}$$

bağıntıları tanımlansın. Bu bağıntıların özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Yansımalı	Yanısmasız	Simetrik	Ters simetrik	Asimetrik	Geçişli	Tam
R_1	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✓
R_2	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✗

$\{R_1, R_2\}$ klasik bağıntılar ailesi yardımıyla bu bağıntıları parametrelere karşılık getirerek aşağıdaki esnek bağıntılar elde edilir.

$$\mathcal{R}^{(12)} = \{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_3),$$
$$(\tilde{e}_5,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_8)\}$$

$$\mathcal{R}^{(21)} = \{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_8),$$
$$(\tilde{e}_5,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_9,\tilde{e}_3)\}$$

Ayrıca R_1 ve R_2 klasik bağıntılarının ürettiği esnek bağıntıları da aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathcal{R}^{(1)} = \{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),\ldots,(\tilde{e}_9,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_9),$$
$$(\tilde{e}_3,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_1),\ldots,(\tilde{e}_5,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3),$$
$$(\tilde{e}_6,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_9)\}$$

$$\mathcal{R}^{(2)} = \{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_6),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_4,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_9,\tilde{e}_1)\}$$

Yukarıda elde edilen esnek bağıntıların özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Yansımalı	Yanısmasız	Simetrik	Ters simetrik	Asimetrik	Geçişli	Tam
$\mathcal{R}^{(12)}$	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✗
$\mathcal{R}^{(21)}$	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✗
$\mathcal{R}^{(1)}$	✓	✗	✗	✓	✗	✓	✗
$\mathcal{R}^{(2)}$	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✗

Uyarı 3.1.1. Örnek 3.1.1. yardımıyla parametrelendirilmiş klasik tam bağıntılar ailesi, bir tam esnek bağıntıya karşılık gelmeyebilir. Ayrıca belirli özelliklere sahip klasik bağıntıların parametrelendirilmiş herhangi bir ailesi ile bu aileye karşılık gelen esnek bağıntı aynı özelliklere sahip olmaya bilir.

Önerme 3.1.2. Her yansıyan, simetrik ve tam esnek bağıntı, sırasıyla yansıyan, simetrik ve tam klasik bağıntılar ailesi olarak nitelendirilir.

İspat. P parametreler kümesi ile $\tilde{U}$ üzerinde $\mathcal{R}$ yansıyan esnek bağıntısı verilsin. Her $\tilde{x} \in SE\left(\tilde{U}\right)$ için $\left(\tilde{x}, \tilde{x}\right) \in \mathcal{R}$ olduğundan her $\alpha \in P$ için $\left(\tilde{x}\left(\alpha\right), \tilde{x}\left(\alpha\right)\right) \in \mathcal{R}_\alpha$ olur. Böylece $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntısı da yansımalıdır.

Benzer şekilde $\mathcal{R}$ simetrik esnek bağıntısı verildiğinde her $\tilde{x}, \tilde{y} \in SE\left(\tilde{U}\right)$ için $\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) \in \mathcal{R}$ ise $\left(\tilde{y}, \tilde{x}\right) \in \mathcal{R}$ olur. Buradan her $\alpha \in P$ için $\left(\tilde{x}\left(\alpha\right), \tilde{y}\left(\alpha\right)\right) \in \mathcal{R}_\alpha$ ise $\left(\tilde{y}\left(\alpha\right), \tilde{x}\left(\alpha\right)\right) \in \mathcal{R}_\alpha$ olduğundan $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntısı simetriktir.

Tam esnek bağıntı olması durumunda da ispat aynı şekilde yapılır.

Örnek 3.1.2. Örnek 3.1.1. yardımıyla $\mathcal{R}_1$ esnek bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{R}_1 = \left\{\left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1\right), \ldots, \left(\tilde{e}_9, \tilde{e}_9\right), \left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_5\right), \left(\tilde{e}_5, \tilde{e}_1\right), \left(\tilde{e}_4, \tilde{e}_6\right), \left(\tilde{e}_6, \tilde{e}_4\right), \left(\tilde{e}_7, \tilde{e}_8\right), \left(\tilde{e}_8, \tilde{e}_7\right)\right\}.$$

$\mathcal{R}_1$ esnek bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişli olduğundan denklik bağıntısıdır. Buradan parametrelere karşılık

$$\mathcal{R}_{1_\alpha} = \left\{\left(u,u\right), \left(v,v\right), \left(w,w\right), \left(u,v\right), \left(v,u\right)\right\},$$

$$\mathcal{R}_{1_\beta} = \left\{\left(u,u\right), \left(v,v\right), \left(w,w\right), \left(u,v\right), \left(v,u\right), \left(u,w\right), \left(w,u\right)\right\}$$

klasik bağıntıları elde edilir. $\mathcal{R}_{1\alpha}$ yansıyan, simetrik ve geçişli iken $\mathcal{R}_{1\beta}$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişsiz olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathcal{R}_{1\alpha}$ denklik bağıntısı olmasına rağmen $\mathcal{R}_{1\beta}$ değildir.

$\mathcal{R}_2$ esnek bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{R}_2 = \{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),\dots,(\tilde{e}_9,\tilde{e}_9),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),(\tilde{e}_1,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_5),(\tilde{e}_8,\tilde{e}_7)\}.$$

$\mathcal{R}_2$ esnek bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişli olduğundan kısmi sıralama bağıntısıdır. Buradan parametrelere karşılık

$$\mathcal{R}_{2_\alpha} = \{(u,u),(v,v),(w,w),(u,v)\},$$

$$\mathcal{R}_{2_\beta} = \{(u,u),(v,v),(w,w),(u,v),(v,u)\}$$

klasik bağıntıları elde edilir. $\mathcal{R}_{2\alpha}$ yansıyan, ters simetrik ve geçişli iken $\mathcal{R}_{2\beta}$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişli olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathcal{R}_{2\alpha}$ kısmi sıralama bağıntısı olmasına rağmen $\mathcal{R}_{2\beta}$ denklik bağıntısıdır.

$\mathcal{R}_3$ esnek bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın,

$$\mathcal{R}_3 = \{(\tilde{e}_1,\tilde{e}_7),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_1),(\tilde{e}_2,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_5,\tilde{e}_4),(\tilde{e}_7,\tilde{e}_8)\}.$$

$\mathcal{R}_3$ esnek bağıntısı yansımasız, ters simetrik ve geçişsizdir. Buradan parametrelere karşılık

$$\mathcal{R}_{3_\alpha} = \{(u,u),(v,v),(w,w),(u,w)\},$$

$$\mathcal{R}_{3_\beta} = \{(u,u),(v,v),(u,v),(v,u)\}$$

klasik bağıntıları elde edilir. $\mathcal{R}_{3\alpha}$ yansıyan, ters simetrik ve geçişli iken $\mathcal{R}_{3\beta}$ bağıntısının yansıyan olmadığı, simetrik ve geçişli olduğu görülür.

Uyarı 3.1.2. Örnek 3.1.2. den bir esnek bağıntı yansımasız, asimetrik, ters simetrik, geçişli iken bu esnek bağıntıya karşılık gelen parametrelendirilmiş klasik bağıntılar ailesi bu özelliklere sahip olmayabilir.

Tanım 3.1.2. $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesi üzerinde P parametreler kümesi ile bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı verilsin ve s herhangi bir bağıntı özelliği olsun. $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının s özelliğine göre kapanışı $\mathcal{R}$'yi içeren ve s özelliğine sahip her bağıntının bir alt kümesidir. Bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının kapanışı $cl\mathcal{R}$ ile gösterilir.

- $\tilde{U}$ üzerindeki esnek özdeşlik esnek bağıntısı
  $\Delta = \{(\tilde{x}, \tilde{x}) : \tilde{x} \in SE(\tilde{U})\}$ ile tanımlanır.

$\mathcal{R}$ esnek bağıntısının yansıyan kapanışı $cl\mathcal{R}^r = \mathcal{R} \cup \Delta$ olur.

- $\tilde{U}$ üzerindeki $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının tersi
  $\mathcal{R}^{-1} = \{(\tilde{y}, \tilde{x}) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}\}$ ile tanımlanır.

$\mathcal{R}$ esnek bağıntısının simetrik kapanışı $cl\mathcal{R}^s = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ olur.

- $\tilde{U}$ üzerindeki $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının kendisiyle bileşkesi
  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(\tilde{x}, \tilde{z}) : \exists \tilde{y} \in SE(\tilde{U}) \ni (\tilde{x}, \tilde{y}), (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathcal{R}\}$ ile tanımlanır.

$\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n-1} \circ \mathcal{R}$

olmak üzere $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının n-kez bileşkesi $\mathcal{R}^n$ ile ifade edilsin

$\mathcal{R}$ esnek bağıntısının geçişli kapanışı $cl\mathcal{R}^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$ olur.

Uyarı 3.1.3. Önerme 3.1.2.'den $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının yansıyan ve simetrik kapanışı, her $\alpha \in P$ için $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntılarının parametrelendirilmiş yansıyan ve simetrik kapanışlarının ailesi olarak nitelendirilebilir. Fakat Uyarı 3.1.2.'den $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının geçişli kapanışı, her $\alpha \in P$ için $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntılarının parametrelendirilmiş geçişli kapanışlarının ailesi olarak nitelendirilemez.

Tanım 3.1.3. $\tilde{U}$ üzerinde bir esnek denklik bağıntısı $\mathcal{R}$ ve $\tilde{x} \in SE(\tilde{U})$ olsun. $\mathcal{R}$ esnek bağıntısına göre $\tilde{x}$ ile ilişkili esnek elemanlar sınıfının ürettiği $\tilde{U}$ kümesinin esnek alt kümesine $\tilde{x}$'nın esnek denklik sınıfı denir ve

$$[\tilde{x}]_{\mathcal{R}} = SS(\{\tilde{y} \in SE(\tilde{U}) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{R}\})$$

şeklinde gösterilir. $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısının tüm esnek denklik sınıflarının ailesine $\tilde{U}$ esnek kümesinin $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısına göre bölüm kümesi denir. $\tilde{U}/\mathcal{R}$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 3.1.4. Örnek 3.1.2. için $\mathcal{R}_1$ esnek denklik bağıntısının denklik sınıfları

$$[\tilde{e}_1] = [\tilde{e}_5] = SS(\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_5\}) = \{(\alpha, \{u, v\}), (\beta, \{u, v\})\},$$

$$[\tilde{e}_2] = SS(\{\tilde{e}_2\}) = \{(\alpha, \{u\}), (\beta, \{v\})\},$$

$$[\tilde{e}_3] = SS(\{\tilde{e}_3\}) = \{(\alpha, \{u\}), (\beta, \{w\})\},$$

$$[\tilde{e}_4] = [\tilde{e}_6] = SS(\{\tilde{e}_4, \tilde{e}_6\}) = \{(\alpha, \{v\}), (\beta, \{u, w\})\},$$

$$[\tilde{e}_7] = [\tilde{e}_8] = SS(\{\tilde{e}_7, \tilde{e}_8\}) = \{(\alpha, \{w\}), (\beta, \{u, v\})\},$$

$$[\tilde{e}_9] = SS(\{\tilde{e}_9\}) = \{(\alpha, \{w\}), (\beta, \{w\})\}$$

olur. Burada $[\tilde{e}_1]$ veya $[\tilde{e}_5]$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_5\}$ esnek elemanlarının sınıfı ile üretilen esnek denklik sınıflarıdır. Fakat $\tilde{e}_2$ ve $\tilde{e}_4$ de bu esnek denklik sınıfına aittir. Buradan $[\tilde{e}_1] \Cap [\tilde{e}_2] \neq \Phi$ ve $[\tilde{e}_1] \Cap [\tilde{e}_4] \neq \Phi$ olur. Böylelikle klasikten farklı olarak farklı esnek denklik sınıflarının ayrık olmadığı görülür.

Teorem 3.1.1. $\mathcal{R}$, $\tilde{U}$ üzerinde denklik bağıntısı olsun.

1. $\tilde{U}$ esnek kümesi üzerindeki tüm esnek denklik sınıfları boştan farklıdır.
2. Tüm esnek denklik sınıflarının elemanter esnek birleşimi $\tilde{U}$ evrensel esnek kümesine eşittir.
   $$\biguplus_{\tilde{x} \in \tilde{U}} [\tilde{x}]_{\mathcal{R}} = \tilde{U}.$$
3. Bir esnek denklik sınıfı çifti eşit, birbirinin alt kümesi veya ayrıktır ancak ve ancak her $\alpha \in P$ için $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntıları denklik bağıntılarıdır.

İspat. Bir ve ikinci maddeler klasik bağıntıdaki gibi benzer şekilde ispatlanabileceği için yalnızca üçüncü madde ispatlanmıştır.

$\tilde{x}, \tilde{y} \in SE(\tilde{U})$ için $[\tilde{x}] \Cap [\tilde{y}] \neq \Phi$ olsun. $\tilde{z} \in SE([\tilde{x}])$ ve $\tilde{z} \in SE([\tilde{y}])$ olacak şekilde $\tilde{z} \in SE(\tilde{U})$ vardır. Eğer $\tilde{z}$, $[\tilde{x}]$ ve $[\tilde{y}]$ esnek denklik sınıflarını üreten esnek eleman sınıflarından herhangi birine ait değil ise $[\tilde{x}] \tilde{\subset} [\tilde{y}]$ veya $[\tilde{y}] \tilde{\subset} [\tilde{x}]$ olur. Buradan her $\alpha \in P$

için $[\tilde{x}](\alpha)\subset[\tilde{y}](\alpha)$ veya $[\tilde{y}](\alpha)\subset[\tilde{x}](\alpha)$ olur. $\tilde{z}$, $[\tilde{x}]$ ve $[\tilde{y}]$ esnek denklik sınıflarını üreten esnek eleman sınıflarından herhangi birine ait ise $[\tilde{x}]=[\tilde{y}]$ olduğu görülür. Buradan her $\alpha\in P$ için $[\tilde{x}](\alpha)=[\tilde{y}](\alpha)$ elde edilir. Kabul edelim ki $[\tilde{x}]\Cap[\tilde{y}]\neq\Phi$ olsun. Bu durumda en az bir $\alpha\in P$ için $[\tilde{x}](\alpha)\cap[\tilde{y}](\alpha)=\varnothing$ olur. $[\tilde{x}](\alpha)\cap[\tilde{y}](\alpha)\neq\varnothing$ durumu için $[\tilde{x}](\alpha)=[\tilde{y}](\alpha)$ veya $[\tilde{x}](\alpha)\subset[\tilde{y}](\alpha)$ ya da $[\tilde{y}](\alpha)\subset[\tilde{x}](\alpha)$ olur. Böylelikle her $\alpha\in P$ ve $\tilde{x}\in SE(\tilde{U})$ için $[\tilde{x}](\alpha)$ U üzerinde bir parçalanışa karşılık gelir. U kümesinin her parçalanışı U üzerinde bir denklik bağıntısı belirttiği için her $\alpha\in P$ için $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntısı bu denklik bağıntılarına karşılık gelir. Böylelikle her $\alpha\in P$ için $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntıları denklik bağıntılarıdır.

Tersine her $\alpha\in P$ için $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntıları denklik bağıntıları olsun. Önerme 3.1.'de olduğu gibi $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntısı $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısını üretir. Buradan her $\alpha\in P$ ve $\tilde{x}\in SE(\tilde{U})$ için $[\tilde{x}](\alpha)$ kümelerine karşılık gelen $\mathcal{R}_\alpha$ klasik bağıntısının denklik sınıfları eşit veya ayrıktır. Buradan herhangi $\tilde{x},\tilde{y}\in SE(\tilde{U})$ için $\mathcal{R}$ esnek denklik bağıntısına göre esnek denklik sınıfları eşit veya ayrık olur.

Tanım 3.1.4. $\tilde{U}$ üzerinde esnek ön sıralama bağıntısı $\mathcal{R}$ olsun, $G\in S(\tilde{U})$ ve $\tilde{x}\,\tilde{\in}\,G$ olsun.

Her $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,G$ için $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ ifadesi $\tilde{x}=\tilde{y}$ olmasını gerektiriyor ise $\tilde{x}$ elemanı G esnek kümesinin maksimal esnek elemanıdır denir.

Her $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,G$ için $\tilde{y}\mathcal{R}\tilde{x}$ ifadesi $\tilde{x}=\tilde{y}$ olmasını gerektiriyor ise $\tilde{x}$ elemanı G esnek kümesinin minimal esnek elemanıdır denir.

Her $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,G$ için $\tilde{x}\mathcal{R}\tilde{y}$ ise $\tilde{x}$ esnek elemanı G esnek kümesinin en küçük elemanıdır denir.

Her $\tilde{y}\,\tilde{\in}\,G$ için $\tilde{y}\mathcal{R}\tilde{x}$ ise $\tilde{x}$ esnek elemanı G esnek kümesinin en büyük elemanıdır denir.

$\mathcal{R}$ esnek ön sıralama bağıntısı ters simetrik olsun ($\mathcal{R}$ esnek kısmi sıralama bağıntısı). Bu durumda G esnek kümesi birden fazla en büyük (veya en küçük) esnek elemana sahip olabilir. $\tilde{x}$ esnek elemanı G esnek kümesinin en büyük (veya en küçük) esnek elemanı ise o halde $\tilde{x}$ elemanı G kümesinin tek maksimal (veya minimal) esnek elemanıdır.

Esnek tam ön sıralama bağıntısı verildiğinde $\tilde{x}$ esnek elemanının G esnek kümesinde maksimal (veya minimal) esnek eleman olması $\tilde{x}$ esnek elemanının G esnek kümesinde en büyük (veya en küçük) esnek eleman olması aynı şeydir. Bir esnek tam sıralama esnek doğrusal sıralama veya esnek zincir olarak adlandırılır. Bir esnek tam sıralama $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesinin boştan farklı her esnek alt kümesi bir en küçük elemana sahip ise bir esnek iyi sıralama olarak adlandırılır. Esnek sıralama için standart bir örnek esnek reel sayıların esnek sıralamasıdır (Das ve Samanta, 2012: 551).

Tezin bundan sonraki kısmında esnek sıralama bağıntıları için $\mathcal{R}$ yerine $\tilde{\precsim}$ alışılmış notasyonu kullanılmış ve $\tilde{x} \tilde{\prec} \tilde{y}$ ile $\tilde{x} \tilde{\precsim} \tilde{y}$ ve $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ anlatılmak istenmiştir. $\tilde{U}$ üzerindeki esnek sıralama notasyonu $\tilde{\precsim}$ ters yüz edilerek oluşturulan $\tilde{y} \tilde{\succsim} \tilde{x}$ $\left(\tilde{y} \tilde{\succ} \tilde{x}\right)$ yazımı ile anlatılmak istenen $\tilde{x} \tilde{\precsim} \tilde{y}$ $\left(\tilde{x} \tilde{\prec} \tilde{y}\right)$ ile aynı şeydir.

Tanım 3.1.5. $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesi üzerinde P parametreler kümesi ile $\tilde{\precsim}$ esnek ön sıralama bağıntısı verilsin ve $G \in S\left(\tilde{U}\right)$ olsun. Her bir $\tilde{x} \in \tilde{U}$ için aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$i\left(\tilde{x}\right) = SS\left(\left\{\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{U} : \tilde{x} \tilde{\precsim} \tilde{y}\right\}\right),$$

$$d\left(\tilde{x}\right) = SS\left(\left\{\tilde{y} \tilde{\in} \tilde{U} : \tilde{y} \tilde{\precsim} \tilde{x}\right\}\right).$$

Eğer $i\left(G\right) \tilde{\subset} G$ veya $d\left(G\right) \tilde{\subset} G$ ise $G \in S\left(\tilde{U}\right)$ esnek kümesi sırasıyla artan veya azalan olarak adlandırılır. Her $G \in S\left(\tilde{U}\right)$ esnek kümesi $I\left(G\right)$ ve $D\left(G\right)$ şeklinde ifade edilen ve G esnek kümesini içeren sırasıyla tek bir en küçük artan ve azalan esnek küme belirler. Böylelikle $I\left(G\right) = i\left(G\right) \Cup G$ ve $D\left(G\right) = d\left(G\right) \Cup G$ olur.

Tanım 3.1.6. $\tilde{\precsim}$ bağıntısı $\tilde{U}$ üzerinde esnek ön sıralama bağıntısı olsun. $\tilde{U}$ üzerindeki esnek elemanların koleksiyonları

$$\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) = \left\{\tilde{x} \in SE\left(\tilde{U}\right) : \tilde{a} \tilde{\prec} \tilde{x} \tilde{\prec} \tilde{b}\right\},$$

$$\left[\tilde{a}, \tilde{b}\right] = \left\{\tilde{x} \in SE\left(\tilde{U}\right) : \tilde{a} \tilde{\precsim} \tilde{x} \tilde{\precsim} \tilde{b}\right\},$$

$$\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right] = \left\{\tilde{x} \in SE\left(\tilde{U}\right) : \tilde{a} \tilde{\prec} \tilde{x} \tilde{\precsim} \tilde{b}\right\},$$

$$\left[\tilde{a},\tilde{b}\right)=\left\{\tilde{x}\in SE\left(\tilde{U}\right):\tilde{a}\,\tilde{\precsim}\,\tilde{x}\,\tilde{\prec}\,\tilde{b}\right\}$$

sırasıyla açık aralık, kapalı aralık ve yarı açık aralıklar olarak adlandırılır. Buradan $SS\left(\left(\tilde{a},\tilde{b}\right)\right),SS\left(\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]\right),SS\left(\left(\tilde{a},\tilde{b}\right]\right),SS\left(\left[\tilde{a},\tilde{b}\right)\right)\tilde{\subseteq}\tilde{U}$ esnek alt kümeleri sırasıyla esnek açık aralık, esnek kapalı aralık ve esnek yarı açık aralıklar olarak adlandırılır.

Ayrıca $\tilde{U}$ kümesinin esnek elemanlarının koleksiyonları

$$\left(-\infty,\tilde{a}\right)=\left\{\tilde{x}\in SE\left(\tilde{U}\right):\tilde{x}\,\tilde{\prec}\,\tilde{a}\right\},$$

$$\left(\tilde{a},\infty\right)=\left\{\tilde{x}\in SE\left(\tilde{U}\right):\tilde{x}\,\tilde{\succ}\,\tilde{a}\right\},$$

$$\left(-\infty,\tilde{a}\right]=\left\{\tilde{x}\in SE\left(\tilde{U}\right):\tilde{x}\,\tilde{\precsim}\,\tilde{a}\right\},$$

$$\left[\tilde{a},\infty\right)=\left\{\tilde{x}\in SE\left(\tilde{U}\right):\tilde{x}\,\tilde{\succsim}\,\tilde{a}\right\}$$

sırasıyla açık ışınlar ve kapalı ışınlar olarak adlandırılır. Buradan $SS\left(\left(-\infty,\tilde{a}\right)\right),SS\left(\left(\tilde{a},\infty\right)\right),SS\left(\left(-\infty,\tilde{a}\right]\right),SS\left(\left[\tilde{a},\infty\right)\right)\tilde{\subseteq}\tilde{U}$ esnek alt kümeleri sırasıyla esnek açık ışınlar ve esnek kapalı ışınlar olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.7. P parametreler kümesi kullanılarak $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesi üzerinde $\tilde{\precsim}$ esnek ön sıralama bağıntısı verilsin. $\tilde{a}\,\tilde{\precsim}\,\tilde{b}\,\tilde{\precsim}\,\tilde{c}$ ve $\tilde{a},\tilde{c}\,\tilde{\in}\,G$ iken $\tilde{b}\,\tilde{\in}\,G$ oluyor ise $G\in S\left(\tilde{U}\right)$ esnek kümesi dış bükey (konveks) denir.

Her $G\in S\left(\tilde{U}\right)$ kümesi tek bir en küçük dış bükey esnek küme tanımlar ve bu esnek küme $C\left(G\right)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.3. $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesi üzerinde P parametreler kümesi ile $\tilde{\precsim}$ esnek sıralama bağıntısı verilsin. $G\in S\left(\tilde{U}\right)$ kümesi artandır (veya azalandır) ancak ve ancak $G^{C}\in S\left(\tilde{U}\right)$ ve $G^{\mathbb{C}}$ azalandır (veya artandır).

İspat. $G\in S\left(\tilde{U}\right)$ kümesi artan esnek küme olsun. $G^{C}\notin S\left(\tilde{U}\right)$ ise $G^{\mathbb{C}}=\Phi$ olur ve bu nedenle $G^{\mathbb{C}}$ artan veya azalan esnek küme olmaz. O halde $G^{\mathbb{C}}$ azalan esnek küme olmasın öyle ki $G^{C}\in S\left(\tilde{U}\right)$ olsun. $\tilde{x}\in SE\left(d\left(G^{\mathbb{C}}\right)\right)$ ve $\tilde{x}\notin SE\left(G^{\mathbb{C}}\right)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}$ esnek elemanı vardır. Buradan $\tilde{x} \tilde{\precsim} \tilde{y}$ şartını sağlayan öyle bir $\tilde{y} \in SE(G^{\mathbb{C}})$ vardır. Bu nedenle $\tilde{y} \in SE(G)$ olduğunda G artan esnek küme ve $\tilde{x} \in SE(G)$ olur, fakat $G^{C} \in S(\tilde{U})$ olduğundan $G \Cap G^{\mathbb{C}} = \Phi$ olur ve bu ise çelişkidir. Böylelikle $G^{\mathbb{C}}$ azalan esnek küme olur. İspatın diğer tarafı ve G esnek kümesinin azalan olduğu durum benzer şekilde gösterilir.

Önerme 3.1.4. P parametreler kümesi ile $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesi üzerinde $\tilde{\precsim}$ esnek ön sıralama bağıntısı verilsin.

1. Herhangi artan (veya azalan) esnek kümelerin $\varepsilon - birleşimleri$ artandır (veya azalandır).
2. Eğer herhangi artan (veya azalan) esnek kümelerin kesişimi $S(\tilde{U})$ kümesinin elemanı ise bunların herhangi $\varepsilon - kesişimleri$ esnek artan (veya azalan) kümelerdir

İspat. İkinci madde ve azalan esnek kümeler üzerindeki durumlar benzer şekilde elde edilebileceği için sadece birinci madde artan esnek kümeler için ispatlanmıştır.

Varsayalım ki artan esnek kümeler $\{G_i : i \in I\}$ koleksiyonu verilsin ve $\tilde{x} \tilde{\in} \Cup_{i \in I} G_i$ olsun. $i_0 \in I$ için bir G_{i_0} esnek kümesi vardır öyle ki $\tilde{x} \tilde{\in} G_{i_0}$ şartını sağlar. Buradan

$$i(\tilde{x}) \tilde{\subset} i(G_{i_0}) \tilde{\subset} G_{i_0} \tilde{\subset} \Cup_{i \in I} G_i .$$

Böylece artan esnek kümelerin $\varepsilon - birleşimleri$ $\Cup_{i \in I} G_i$ artan esnek kümesidir.

4. ESNEK BAĞINTININ KARAR VERMEDE KULLANIMI

Bu bölümde, esnek elemanlar ve esnek bağıntı kullanılarak karar verme problemlerinin çözümü için (Maji vd., 2002: 1077)'deki ağırlıklı yöntemi esas alan bir algoritma sunulmaktadır. Ayrıca bir karar verme probleminin çözümü için bu algoritmayı kullanan açıklayıcı bir örnek verilmiştir.

Esnek kümelerde veya hibrit esnek kümelerde bağıntı kavramının kullanıldığı karar verme uygulamalarında, parametrelere ve onların ağırlıklarına bağlı olarak alternatifler içinden tek bir elemana karşılık gelecek şekilde karar verilir. Halbuki, bir karar verici tercihini oluşturacak her bir unsuru kendi mevcut kriterlerine göre belirlemek isteyebilir. Bu tercihi yaparken diğer durumlar ile olası ilişkiler de bir sorun olarak ortaya çıkar. Burada karar verme sürecinde bahsedilen durumlarla başa çıkabilmek için esnek elemanların ve esnek bağıntının kullanılması önerilmektedir. Önerilen karar verme metodu için matematiksel bir çerçeve elde etmek adına aşağıdakiler tanımlanmıştır.

Tanım 4.1. P parametreler kümesi ile $\tilde{U}$ mutlak esnek kümesi ve $G \in S(\tilde{U})$ esnek kümesi üzerinde bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı verilsin.

- Bir $\tilde{e}_m \in G$ esnek elemanının $\mathcal{R}$ esnek bağıntısında kendisi hariç bağıntılı olduğu esnek eleman sayısı, $\tilde{e}_m$ esnek elemanının derecesi olarak adlandırılır ve $\deg(\tilde{e}_m) = d_m$ ile gösterilir. Eğer $\tilde{e}_m$ esnek elemanı kendisi ile de bağıntılı ise yani $(\tilde{e}_m, \tilde{e}_m) \in \mathcal{R}$ ise $\deg(\tilde{e}_m)$'e iki derece eklenir.
- $\mathcal{R}$ esnek bağıntısından indirgenen $\mathcal{R}_{\alpha_i}$ parametrelendirilmiş klasik bağıntılarının tablo gösterimi; her $\alpha_i \in P$ ve $p_j \in U \times U$ için $p_j \in \mathcal{R}_{\alpha_i}$ ise $p_{ij} = 1$ aksi taktirde $p_{ij} = 0$ olmak üzere p_{ij} girdilerinden oluşur.
- Bir çift p_j çiftinin ağırlıklı değeri, P'deki parametreler için belirlenen ağırlıklar $w_i \in (0,1]$ olmak üzere,

$$s_j = \sum_i w_i p_{ij},$$

  ile tanımlanır.

Şimdi, esnek elemanlar ve esnek bağıntılar kullanılarak aşağıdaki algoritma oluşturulabilir.

Algoritma: Esnek elemanları ve esnek bağıntıyı kullanarak karar verme

1.adım Karar vericiye bağlı olarak, U üzerinde P parametreler kümesi ile uygun bir G esnek kümesi oluştur.

2.adım G esnek kümesi üzerinde istenildiği şekilde bir $\mathcal{R}$ esnek bağıntısı oluştur.

3.adım $\mathcal{R}$ esnek bağıntısının geçişli kapanışı $cl\mathcal{R}^t$'yi bul ve $cl\mathcal{R}^t$'te $\mathcal{L} = \{l : d_l = \max d_m\}$ kümesini bul.

4.adım Eğer sadece bir tane $l \in \mathcal{L}$ varsa $\tilde{e}_l$ seçilebilir.

5.adım Aksi taktirde $l, l' \in \mathcal{L}$ olacak şekilde $(\tilde{e}_l, \tilde{e}_{l'}) \in cl\mathcal{R}^t$ çiftlerini bul.

6.adım Her $\alpha_j \in P$ için $cl\mathcal{R}^t_{\alpha_j}$'ların ağırlıklı tablosunu yap ve s_i'leri hesaplayarak, $s_k = \max s_i$ olacak şekilde k'yı bul.

7.adım Eğer her $l, l' \in \mathcal{L}$ ve $\alpha_j \in P$ için $(\tilde{e}_l, \tilde{e}_{l'})(\alpha_j) = p_k$ olacak şekilde bir eleman çifti yoksa her $l \in \mathcal{L}$ için herhangi bir $\tilde{e}_l$ seçilebilir.

8.adım Aksi taktirde $(\tilde{e}_l, \tilde{e}_{l'})$ çiftlerinde en çok bağlantılı olan ve $(\tilde{e}_l, \tilde{e}_{l'})(\alpha_j) = p_k$'ya sahip olan $\tilde{e}_l$ veya $\tilde{e}_{l'}$ esnek elemanlarından herhangi biri seçilebilir

4.1. Esnek Bağıntının Karar Vermede Kullanımına Bir Örnek

Bir firma, mevcut diğer sistemlerle de entegre olabilecek en uygun sistemi oluşturmak ve bu sistem için gerekli bileşenleri belirlenen parametrelere göre seçmek istiyor. Satıcılar, istenilen sisteme göre her sistem bileşeni için firmaya çeşitli markalar sunmakta ve elde edilebilecek sistemlerin tercih edilen markalar ile entegrasyonunu sağlamaktadır.

$U = \{u, v, w, x, y\}$, bileşenler için satıcılar tarafından sunulan markaların bir kümesi ve $P = \{\alpha_1 = \text{sağlam}, \alpha_2 = \text{uyumlu}, \alpha_3 = \text{ucuz}, \alpha_4 = \text{özelleştirilebilir}\}$ her parametrenin aynı zamanda sistem için gerekli bir bileşene karşılık geldiği, firma tarafından belirlenen bir parametreler kümesi olsun.

Firmanın belirlediği parametrelere göre bir satıcının sağlayabileceği sistem bileşenleri için markalar

$$G=\{(\alpha_1,\{u,w,y\}),(\alpha_2,\{v,x,y\}),(\alpha_3,\{u,x\}),(\alpha_4,\{y\})\}$$

esnek kümesi ile verilsin.

Bu şekilde oluşturulan her esnek kümenin her bir esnek elemanı, firma tarafından belirlenen parametrelere göre satıcılar tarafından sağlanan sistem bileşenleri ile oluşturulan bir sisteme karşılık gelir. *G* esnek kümesinin esnek elemanları aşağıda listelenmiştir.

Tablo 4.1. *G* esnek kümesinin esnek elemanları

$\tilde{e}_1=\{(\alpha_1,u),(\alpha_2,v),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{10}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,x),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_2=\{(\alpha_1,u),(\alpha_2,v),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{11}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,y),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_3=\{(\alpha_1,u),(\alpha_2,x),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{12}=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,y),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_4=\{(\alpha_1,u),(\alpha_2,x),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{13}=\{(\alpha_1,y),(\alpha_2,v),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_5=\{(\alpha_1,u),(\alpha_2,y),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{14}=\{(\alpha_1,y),(\alpha_2,v),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_6=\{(\alpha_1,u),(\alpha_2,y),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{15}=\{(\alpha_1,y),(\alpha_2,x),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_7=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,v),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{16}=\{(\alpha_1,y),(\alpha_2,x),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_8=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,v),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{17}=\{(\alpha_1,y),(\alpha_2,y),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,
$\tilde{e}_9=\{(\alpha_1,w),(\alpha_2,x),(\alpha_3,u),(\alpha_4,y)\}$,	$\tilde{e}_{18}=\{(\alpha_1,y),(\alpha_2,y),(\alpha_3,x),(\alpha_4,y)\}$.

Ayrıca bu esnek kümeler üzerindeki her bir esnek bağıntı da yine satıcılar tarafından temin edilen sistemlerin entegre edilmiş haline karşılık gelir. Buradan, G esnek kümesi üzerinde verilen

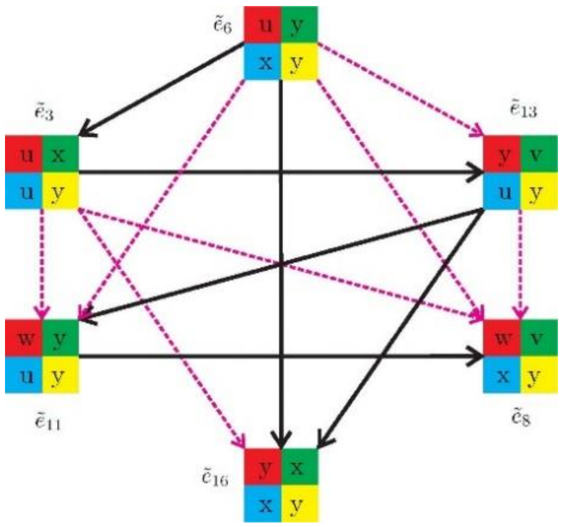
$$\mathcal{R}=\{(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{16})\}$$

esnek bağıntısı, satıcının sağlayabileceği sistemleri ve onların entegre edilmiş halini temsil etsin.

$\mathcal{R}$ esnek bağıntısının geçişli kapanışı $cl\mathcal{R}^t$, satıcı tarafından ileride oluşturulması mümkün olabilecek olan bütün sistem entegrasyonlarını belirtir.

$$cl\mathcal{R}^t = \{(\tilde{e}_3,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{16}),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_8),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{13}),(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{16}),$$
$$(\tilde{e}_{11},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_8),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{11}),(\tilde{e}_{13},\tilde{e}_{16})\}.$$

Böylece, algoritmaya göre $cl\mathcal{R}^t$ üzerinde esnek elemanların dereceleri $d_3 = d_6 = d_{13} = 5$, $d_8 = d_{11} = 4$ ve $d_6 = 3$ şeklinde olduğundan maksimum dereceye sahip üç esnek eleman vardır ve bunlar $\tilde{e}_3, \tilde{e}_6$ ve $\tilde{e}_{13}$ esnek elemanlarıdır. Ayrıca bu esnek elemanlar birbiriyle bağıntılı olup $(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13})$, $(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3)$ ve $(\tilde{e}_6,\tilde{e}_{13})$ elemanları $cl\mathcal{R}^t$'nın elemanıdır.



Şekil 4.1. $cl\mathcal{R}^t$'nın yönlendirilmiş graf ile temsili.

Burada kırmızı, yeşil, mavi ve sarı renkler sırasıyla α_1, α_2, α_3 ve α_4 parametrelerine karşılık gelmektedir.

Birçok alt sistemin yani sistemlerin bileşenlerinin sistemin işlevselliğini artırmak için birbiriyle entegre olması beklenebilir. Farz edelim ki firma bunu sağlamak adına sistem bileşenlerinin arasındaki entegrasyonu değerlendirmek için her bir parametresine karşılık gelen bir ağırlık değeri versin; yani p_j ikililerini değerlendirmek için parametrelerine karşılık sırasıyla $w_1 = 0,4$, $w_2 = 0,3$, $w_3 = 0,8$ ve $w_4 = 0,3$ ağırlık değerleri atasın.

Tablo 4.2. $cl\mathcal{R}^t$ bağıntısından indirgenen parametrelendirilmiş klasik bağıntıların ağırlıklı tablosu

p_j	$\alpha_1\ (w_1 = 0,4)$	$\alpha_2\ (w_2 = 0,3)$	$\alpha_3\ (w_3 = 0,8)$	$\alpha_4\ (w_4 = 0,3)$	s_j
(u,u)	1	0	1	0	1,2
(u,v)	0	0	0	0	0

(u,w)	1	0	0	0	0,4
(u,x)	0	0	1	0	0,8
(u,y)	1	0	0	0	0,4
(v,u)	0	0	0	0	0
(v,v)	0	1	0	0	0,3
(v,w)	0	0	0	0	0
(v,x)	0	1	0	0	0,3
(v,y)	0	1	0	0	0,3
(w,u)	0	0	0	0	0
(w,v)	0	0	0	0	0
(w,w)	1	0	0	0	0,4
(w,x)	0	0	0	0	0
(w,y)	0	0	0	0	0
(x,u)	0	0	1	0	0,8
(x,v)	0	1	0	0	0,3
(x,w)	0	0	0	0	0
(x,x)	0	1	1	0	1,1
(x,y)	0	1	0	0	0,3
(y,u)	0	0	0	0	0
(y,v)	0	1	0	0	0,3
(y,w)	1	0	0	0	0,4
(y,x)	0	1	0	0	0,3
(y,y)	1	1	0	1	1,0

Algoritmaya göre $cl\mathcal{R}^t$ bağıntısından indirgenen parametrelendirilmiş klasik bağıntıların tablosundan Tablo 4.2.'de görüleceği üzere, ağırlıklı değeri en çok olan sistem bileşen çifti (u,u) yani, $p_k=(u,u)$ olup, parametrelere göre satıcı tarafından sağlanabilecek sistem entegrasyonları içinde bu sistem bileşen çiftine sahip olan sistem çiftleri, $(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13})(\alpha_3)=(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3)(\alpha_1)=(u,u)$ olmak üzere $(\tilde{e}_3,\tilde{e}_{13})$ ve $(\tilde{e}_6,\tilde{e}_3)$ olur. Dolayısıyla firma bu sistem çiftlerinde en çok bağıntılı olan $\tilde{e}_3$ sistemini seçecektir.

KAYNAKLAR

Abbas, M., Ali, B., Romaguera, S., (2014) On generalized soft equality and soft lattice structure. *Filomat,* 28(6), 1191-1203.

Aktaş, H., Çağman, N., (2007) Soft sets and soft groups. *Information Sciences*, 177(13), 2726-2735.

Akgüller, Ö., (2021) Discrete ricci curvature-based statistics for soft sets. *Soft Computing,* 25, 599-612.

Alcantud, J. C. R., (2016) Some formal relationships among soft sets, fuzzy sets, and their extensions. *International Journal of Approximate Reasoning,* 68, 45-53.

Alcantud, J. C. R., (2021) Softarisons: theory and practice. *Neural. Computing and Application,* pp 1-13.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., (2009) On some new operations in soft set. *Computers & Mathematics with Application,* 57(9), 1547-1553.

Ali, M. I., Shabir, M., Naz, M., (2011) Algebraic structures of soft sets associated with new operations. *Computers & Mathematics with Applications,* 61(9), 2647-2654.

Ali, M. I., Shabir, M., Feng, F., (2017) Representation of graphs based on neighborhoods and soft sets. *International Journal of Machine Learning Cybernetics,* 8(5), 1525-1535.

Alhazaymeh, K., Hassan, N.,(2015) Vague soft set relations and functions. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems,* 28(3), 1205-1212.

Al-Shami, T. M., El-Shafei, M. E., (2020) Two new forms of ordered soft separation axioms. *Demonstratio Mathematica,* 53(1), 8-26.

Al-Shami, T. M., El-Shafei, M. E., Abo-Elhamayel, M., (2019) On soft topological ordered spaces. *Journal of King Saud Universitiy Science,* 31(4), 556-566.

Altıntaş, İ., Taşköprü, K., (2020) Compactness of soft cone metric space and fixed point theorems related to diametrically contractive mapping. *Turkish Journal of Mathematics,* 44(6), 2199-2216.

Altıntaş, İ., Taşköprü, K., Selvi, B., (2021) Countable and separable elementary soft topological space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 44(9), 7811-7819.

Atanassov, K. T., (1986) Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems,* 20(1), 87-96.

Aygün, E, Kamacı, H., (2019) Some generalized operations in soft set theory and their role in similarity and decision making. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,* 36(6), 6537-6547.

Aygünoğlu, A, Varol, B. P., Çetkin, ,V., Aygün, H., (2012) Interval-valued intuitionistic fuzzy subgroups based on interval-valued double t-norm. *Neural Computing & Applications,* 21(1), 207-214.

Babitha, K. V., Sunil, J. J., (2010) Soft set relations and functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(7), 1840-1849.

Babitha, K. V., Sunil, J. J., (2011) Transitive closures and orderings on soft sets. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(5), 2235-2239.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang, X., (2005) The parameterization reduction of soft sets and its applications. *Computers & Mathematics with Applications,* 49(5), 757-763.

Chiney, M., Samanta, S., (2019) Soft topology redefined. *Journal of Fuzzy Mathematics,* 27(2), 459-486.

Çağman, N., Enginoğlu, S., (2010) Soft matrix theory and its decision making. *Computers & Mathematics with Application,* 59(10), 3308-3314.

Çetkin, V., Güner, E., Aygün, H., (2020) On 2S-metric spaces. *Soft Comput*, 24, 12,731-12,742.

Dalkılıç, O., (2021) Relations on neutrosophic soft set and their application in decision making. *Journal of Applied Mathematics and Computing,* 1-17.

Das, S., Samanta, S. K., (2012) Soft real sets, soft real numbers and their properties. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 20(3), 551-576.

Das, S., Samanta, S. K., (2013) On soft metric spaces. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 21(3), 707-734.

Deli, İ., (2017) Interval-valued neutrosophic soft sets and its decision making. *International Journal of Machine Learning Cybernetics,* 8(2), 665-676.

El-Shafei, M. E., Al-Shami, T. M., (2020) Applications of partial belong and total non-belong relations on soft separation axioms and decision-making problem. *Computers & Mathematics with Application,* 39(138), 1-17.

Feng, F., Jun, J. B., Liu, X., Li, L., (2010a) An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. *Journal of Computational Applied Mathematics,* 234(1), 10-20.

Feng, F., Li, C., Davvaz, B., Ali, M. I., (2010b) Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. *Soft Comput*, 14, 899-911.

Feng, F., Ali, M. I., Shabir, M., (2013) Soft relations applied to semigroups. *Filomat,* 27(7), 1183-1196.

Gorzalzany, M. B., (1987) A method of inference in approximate reasoning based on interval- valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets Systems,* 21(1), 1-17.

Güler, A. Ç., Yıldırım, E. D., Özbakır, O. B., (2016) A fixed point theorem on soft G-metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications,* 9(3), 885-894.

Herawan, T., Deris, M. M., (2011) A soft set approach for association rules mining. *Knowedgel-Based Systems,* 24(1), 186-195.

Jun, Y. B., Park, C. H., (2008) Applications of soft sets in ideal theory of bck/bci-algebras. *Information Sciences: an International Journal,* 178(11), 2466-2475.

Kamacı, H., (2021) Linguistic single-valued neutrosophic soft sets with applications in game theory. *International Journal of Intelligent Systems*, 36(8), 3917-3960.

Kandemir, M. B., (2018) The concept of σ-algebraic soft set. *Soft Comput,* 22, 4353-43,607.

Kanwal, R. S., Shabir, M., (2019) Rough approximation of a fuzzy set in semigroups based on soft relations. *Computers & Mathematics with Application*, 38(89), 1-23.

Kanwal, R. S., Qurashi, S. M., Shabir, M., (2020) Generalized approximation of substructures in quantales by soft relations. *Computers & Mathematics with Application,* 39(24), 1-22.

Karaaslan, F., (2016) Bipolar soft rough relations. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics,* 65(1): 105-126.

Kolmogorov, A. N., (1950) Foundations of the Theory of Probability, *Chelsea Publishing Company*, 1-84.

Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., (2001) Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics,* 9(3), 589-602.

Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., (2001) Intuitionistic fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3) 677-692.

Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., (2002) An application of soft sets in a decision making problem. *Computers & Mathematics with Application*, 44(8-9), 1077-1083.

Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., (2003) Soft set theory. *Computers & Mathematics with Application*, 45(4-5), 555-562.

Min, W. K., (2011) A note on soft topological spaces. *Computers & Mathematics with Application*, 62(9), 3524-3528.

Molodtsov, D., (1999) Soft set theory first results, *Computers & Mathematics with Application*, 37(4-5), 19-31.

Molodtsov, D., (2004) The theory of soft sets (in Russian), *URSS Publishers. Moscow.*

Molodtsov, D. A., Leonov, V. Y., Kovkov, D. V., (2006) Soft sets technique and its application. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya*, 1(1), 8-39.

Park, J. H., Kim, O. H., Kwun, Y. C., (2012) Some properties of equivalence soft set relations. *Computers & Mathematics with Application*, 63(6), 1079-1088.

Pawlak, Z., (1982) Rough sets. *International Journal of Computer Information Sciences*, 11(5), 341-356.

Pei, D., Miao, D., (2005) From soft sets to information systems. *2005 IEEE International Conference on Granular Computing*, Vol. 2 .IEEE, 617-621.

Qamar, M. A., Hassan, N., (2018) Q-neutrosophic soft relation and its application in decision making. *Entropy*, 20(3), 1-14.

Qin, K., Liu, Q., Xu, Y., (2015) Redefined soft relations and soft functions. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(5), 819-828.

Rosen, K. H., (2019) Discrete Mathematics and Its Applications. *McGraw- Hill Education*, New York.

Sezgin A., Atagün A. O., (2011) On operations of soft sets. *Computers & Mathematics with Application*, 61(5), 1457-1467.

Shabir, M., Naz, M., (2011) On soft topological spaces. *Computers & Mathematics with Application,* 61(7), 1786-1799.

Suzumura, K., (1983) Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare. *Cambridge University Press, Cambridge.*

Taşköprü, K., (2017) *Elemanter esnek topolojik uzaylara giriş*. (Yayınlanmış Doktora Tezi). Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 8-10.

Taşköprü, K., Altıntaş, İ., (2021) A new approach for soft topology and soft function via soft element. *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 44(9), 7556-7570.

Yang, H. L., Guo, Z. L., (2011) Kernels and closures of soft set relations, and soft set relation mappings. *Computers & Mathematics with Application,* 61(3), 651-662.

Yaylalı, G., Polat, N., Tanay, B., (2017) Soft intervals and soft ordered topology. *Celal Bayar University Journal of Science* 13(1), 81-89.

Zadeh, L. A., (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

Zhan, J., Alcantud, J. C. R., (2019) A novel type of soft rough covering and its application to multicriteria group decision making. *Artificial Intelligence Review,* 52(4), 2381-2410.