T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİR ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİDEN ELDE EDİLMİŞ ÖZEL VEKTÖRLER VE ÖZEL EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA BALKAN

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2025

10755164

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİR ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİDEN ELDE EDİLMİŞ ÖZEL VEKTÖRLER VE ÖZEL EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA BALKAN

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. ÖNDER GÖKMEN YILDIZ

BİLECİK, 2025

10755164

BEYAN

'4-Boyutlu Öklid Uzayında Bir Çatılandırılmış Eğriden Elde Edilmiş Özel Vektörler ve Özel Eğriler' adlı yüksek lisans hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

<table>
<tr><td colspan="4">Bu çalışmanın,
Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.</td></tr>
<tr><td>DESTEK ALINMIŞTIR</td><td></td><td>DESTEK ALINMAMIŞTIR</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destek alındı ise;</td></tr>
<tr><td colspan="4">Destekleyen kurum;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desteğin Türü</td><td colspan="2">Proje Numarası</td></tr>
<tr><td colspan="2">1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</td><td colspan="2" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2- TÜBİTAK</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diğer;…………………………………………………
………………</td></tr>
<tr><td colspan="4">ETİK KURUL onayı var ise;</td></tr>
<tr><td colspan="2">ETİK KURUL karar tarih/sayı:</td><td colspan="2">…………………………………/………
………………..</td></tr>
</table>

Fatma Balkan

Tarih

İmza

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi, tecrübe ve desteğiyle yolumu aydınlatan; akademik anlamda olduğu kadar insani yönüyle de bana ilham veren başta değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Önder Gökmen YILDIZ'a ve beni her koşulda destekleyen, sabırları ve sevgileriyle daima yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi iletiyorum.

Fatma BALKAN

2025

ÖZET

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİR ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİDEN ELDE EDİLMİŞ ÖZEL VEKTÖRLER VE ÖZEL EĞRİLER

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayı ve çatılandırılmış eğriler ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış bir eğriden hareketle bazı özel vektörler tanımlanmıştır. Daha sonra bu özel vektörler yardımıyla elde edilen düzlemlerde yatan özel eğrilerin karekterizasyonlarına yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Çatılandırılmış Eğri, Singüler Nokta, Darboux Vektörü, Özel Eğriler.

ABSTRACT

SPECIAL VECTOR FIELDS AND SPECIAL PLANES OF FRAMED CURVES IN 4-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

This study consists of three chapters. The first chapter includes the introduction. The second chapter presents the fundamental concepts related to Euclidean space and framed curves. The third chapter constitutes the original contribution of this study. In this chapter, starting from a framed curve in 4-dimensional Euclidean space, certain special vectors are defined. Then, the characterizations of special curves lying in the planes obtained with the help of these special vectors are provided.

Keywords: Framed Curves, Singular Points, Darboux Vector, Special Curves.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: n -Boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^4$	: 4-Boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^3$	: 3-Boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım Fonksiyonu
$\Vert , \Vert$	: Norm
$\boldsymbol{I}$	: Öklid uzayında bir açık aralık
$\times$	: Vektörel Çarpım
$\boldsymbol{\omega}_j$	: $\mathbb{R}^n$,Öklid Uzayında j -yinci Frenet Vektörü
$\boldsymbol{k}_j$	: $\mathbb{R}^n$, Öklid Uzayında j -yinci Frenet Eğriliği
$\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \boldsymbol{\kappa}_3$	: $\mathbb{R}^4$, 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bir Eğrinin Eğrilikleri
$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2\}$	: $\mathbb{R}^4$ Eğrisinin Frenet Vektörleri
$\{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$	: $\mathbb{R}^4$ de Çatılandırılmış Eğrinin Uyarlanmış Çatısı
$\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$	: $\mathbb{R}^4$ de Çatılandırılmış Eğrinin Çatılandırılmış Eğrilikleri

1.GİRİŞ

Diferansiyel geometri, eğriler ve yüzeyler gibi geometrik yapıların analitik ve cebirsel yöntemlerle incelendiği matematiğin temel disiplinlerinden biridir. Bu alanın önemli bir alt dalı olan eğriler teorisi, özellikle belirli özel eğrilerin tanımlanması, sınıflandırılması ve bu eğrilerin geometrik özelliklerinin analiz edilmesine odaklanır. Eğriler, bulundukları uzaydaki konum vektörlerinin ait olduğu alt uzaylara veya başka eğrilerle olan ilişkilerine bağlı olarak rektifiyan, oskülatör, normal, involüt-evolüt eğri çifti, Bertrand eğri çifti gibi çeşitli türlerde adlandırılır ve incelenir (Chen, 2003: 147; İlarslan & Nesovic, 2008: 21; İlarslan & Nesovic, 2008: 931) ya da çatılandırılmış eğriler gibi farklı kategoriler altında sınıflandırılabilmektedir.

Bu tür sınıflandırmaların temelinde, bir eğri boyunca tanımlı doğal vektör alanları ile bu alanların oluşturduğu Frenet çatısı yer almaktadır. Frenet çatısının zamana (veya parametrizasyona) bağlı olarak değişimi, klasik biçimde Frenet formülleri ile ifade edilir. Bu formüller, üç boyutlu Öklid uzayında, Darboux vektörü kullanılarak vektörel çarpım biçiminde yeniden yazılabilir. Darboux vektörü, Frenet çatısının o andaki dönüş eksenini temsil eder ve bu sayede eğrinin uzayda nasıl konumlandığını ve yöneldiğini kavramsal olarak anlamamıza olanak tanır. Bu noktadan hareketle, dört boyutlu Öklid uzayında bir eğri boyunca tanımlanabilecek yeni vektör alanları aracılığıyla Frenet formüllerinin vektörel çarpım biçiminde ifade edilip edilemeyeceğini önemli bir araştırma sorusu olarak ortaya çıkarmaktadır. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında ve özel olarak $\mathbb{R}^4$ $4-$boyutlu Öklid uzayında tanımlanmış genelleştirilmiş Darboux vektörleri bulunabilir (Camcı vd., 2009: 2590). Ancak, bu vektör alanları istenen amaca hizmet etmemektedir. Düldül tarafından $\mathbb{R}^4$ uzayında eğrilikleri sıfır olmayan bir uzay eğrisi boyunca, istenilen özellikleri sağlayacak dört özel vektör alanı tanımlanmıştır (Düldül, 2021: 274) Daha sonra, tanımlanan bu vektör alanları kullanılarak bazı yeni düzlemler, eğriler belirlenmiştir.

Bir $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ eğrisi için, $\alpha'(t) = 0$ olduğunda, noktası singüler nokta olarak adlandırılır. Eğer bir eğri singüler noktalara sahipse, bu noktalara klasik Frenet çatısını oluşturmak mümkün değildir. Bu durumu ele almak üzere, S. Honda ve M. Takahashi tarafından çatılandırılmış eğri (framed curve) kavramı tanımlanmış ve bu tür eğrilerle ilgili temel kavramsal çerçeve ortaya konmuştur (Honda & Takahashi, 2016:265). Singüler noktalara sahip eğrilerin geometrik olarak incelenmesinde en etkili yöntem, çatılandırılmış eğriye ait eğrilik fonksiyonlarının kullanılmasıdır. Bu doğrultuda, Y. Wang ve arkadaşları (2019), üç boyutlu Öklid uzayında tanımlı çatılandırılmış eğriler için klasik Serret-Frenet tipi çatıdan yola çıkarak, daha işlevsel bir yapı olan uyarlanmış çatıyı (adapted frame) tanımlamıştır (Wang vd., 2019: 37).

Bu tez çalışmasında, $4-$boyutlu Öklid uzayında singüler noktalı çatılandırılmış bir eğrinin Frenet tipli çatısından hareketle $3-$boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri için Darboux vektör alanının oynadığı rolü oynayabilecek dört farklı özel vektör alanı tanımlanmıştır. Daha sonra bu vektör alanlarından hareketle bazı yeni düzlemler ve bu düzlemlerde yatan eğriler tanımlanmıştır. Son olarak tanımlanan özel eğrilerle alakalı bazı sonuçlar verilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n)$ ve $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(\varpi, \sigma) \to \langle \varpi, \sigma \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varpi_i \sigma_i$$

eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpım fonksiyonu olup Öklid iç çarpımı olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2014:1).

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^n$, vektör uzayında $\varpi \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|\varpi\| = \sqrt{\langle \varpi, \varpi \rangle}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyona ϖ vektörünün normu denir (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.3. $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere 3-boyutlu Öklid uzayında vektörel çarpım

$$\varpi \times \sigma = (\varpi_2\sigma_3 - \sigma_2\varpi_3, \varpi_3\sigma_1 - \sigma_3\varpi_1, \varpi_1\sigma_2 - \sigma_1\varpi_2)$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000: 6).

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayının standart tabanı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olmak üzere, $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ ve $o = (o_1, o_2, o_3, o_4)$ vektörleri için vektörel çarpım,

$$\varpi \times \sigma \times o = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \varpi_1 & \varpi_2 & \varpi_3 & \varpi_4 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ o_1 & o_2 & o_3 & o_4 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır (Williams & Stein, 1964:231).

Tanım 2.1.5. $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ düzgün bir dönüşüm olmak üzere α'ya $\mathbb{R}^n$de bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2014:1).

Tanım 2.1.6. $\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı bir eğri ve (x) de $\mathbb{R}^n$ nin dik koordinatı olsun. α'nın türev dönüşümü yardımıyla tanımlanan

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx\big|_t}\right)$$

vektörüne, $\alpha(t)$ noktasındaki α eğrisinin hız vektörü olarak denir ve genellikle $\alpha'(t)$ biçiminde gösterilir (Sabuncuoğlu, 2014:46).

Tanım 2.1.7. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri olsun. Eğer her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa bu eğri düzenli (regüler) olarak adlandırılır. Buradaki $\alpha'(t)$ türev vektörünün sıfır olmaması, eğrinin her noktasında tanımlı ve yönü belirlenmiş bir hız vektörüne sahip olduğunu, dolayısıyla eğrinin o noktada duraksamadan ilerlediğini ifade eder (Hacısalihoğlu 2000:150).

Tanım 2.1.8. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri olsun. $\alpha'(t) = 0$ olabilecek $t \in I$ varsa t noktasına singüler nokta ve α eğrisine de singüler noktalı eğri denir (Hacısalihoğlu 2000:150).

Tanım 2.1.9. α, $n-$boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ şartı sağlanıyor ise eğriye birim hızlı eğri denir ve s'ye de yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000: 149).

Tanım 2.1.10. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri olsun. Eğer

$$\varphi = \left\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\right\}$$

kümesi lineer bağımsız vektörlerden oluşuyorsa, bu kümeden Gram–Schmidt yöntemiyle elde edilen ortonormal

$$\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_r\}$$

kümesine α eğrisinin Serret–Frenet $r-$ayaklı alanı denir. Her $t \in I$ için

$$\{\omega_1(t), \omega_2(t), ..., \omega_r(t)\}$$

kümesi, $\alpha(t)$ noktasındaki Serret–Frenet $r-$ayaklısı olarak adlandırılır. Burada her $\omega_j\,(1 \leq j \leq r)$, $j-$yinci Serret-Frenet vektör alanıdır (Hacısalihoğlu, 2000: 158).

Tanım 2.1.11. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ uzayında birim hızlı bir eğri ve α nın $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı $\{\omega_1(s), \omega_2(s), ..., \omega_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_j : I \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq r,$$
$$s \to k_j(s) = \left\langle \omega_J{}'(s), \omega_{j+1}(s) \right\rangle$$

biçiminde tanımlı k_j fonksiyonuna α eğrisinin $j-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $k_j(s)$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $j-$yinci eğriliği adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000: 173).

Tanım 2.1.12. $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $s \in I$ için Serret-Frenet $r-$ ayaklısı $\{\omega_1(s), \omega_2(s), ..., \omega_n(s)\}$ biçiminde verilsin. α eğrisinin eğrilikleri $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ olmak üzere

$$\omega_1'(s) = k_1(s)\omega_2(s),$$
$$\omega_j'(s) = -k_{j-1}(s)\omega_{j-1}(s) + k_j(s)\omega_{j+1}(s), \qquad 1 \leq j \leq n$$
$$\omega_n'(s) = -k_{n-1}(s)\omega_{n-1}(s)$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu formüller Serret-Frenet türev formülleri olarak adlandırılır. Söz konusu formüller, uygun biçimde düzenlenerek matris gösterimi yardımıyla da

$$\begin{bmatrix} \omega_1'(s) \\ \omega_2'(s) \\ \vdots \\ \omega_{n-1}'(s) \\ \omega_n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2}(s) & 0 & k_{n-1}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(s) \\ \omega_2(s) \\ \vdots \\ \omega_{n-1}(s) \\ \omega_n(s) \end{bmatrix}$$

ifade edilebilir (Hacısalihoğlu 2000:155).

$n = 4$ için

$$\omega_1 = T,$$
$$\omega_2 = N,$$
$$\omega_3 = B_1,$$
$$\omega_4 = B_2$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.1. α , 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere

$$T(s)=\alpha'(s),$$
$$N(s)=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$
$$B_2(s)=-\frac{\alpha'(s)\times\alpha''(s)\times\alpha'''(s)}{\|\alpha'(s)\times\alpha''(s)\times\alpha'''(s)\|},$$
$$B_1(s)=B_2(s)\times T(s)\times N(s)$$

biçimindedir (Sabuncuoğlu, 2014:46).

Teorem 2.1.2. α , 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_1=\|\alpha''(s)\|,$$
$$\kappa_2=\frac{\langle B_1(s),\alpha'''(s)\rangle}{\kappa_1}, \tag{2.1}$$
$$\kappa_3=\frac{\langle B_2,\alpha^{(4)}(s)\rangle}{\kappa_1\kappa_2}$$

dir (Hacısalihoğlu 2000:155).

Tanım 2.1.13. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında tanımlı α bir eğrisinin Frenet çatısı $\{T,N,B_1,B_2\}$ olsun. Belirli bir $s\in I$ için,

$span\{T(s),N(s),B_2(s)\}$ alt uzayına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör alt uzayı

$span\{T(s),B_1(s),B_2(s)\}$ alt uzayına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan alt uzayı

$span\{N(s),B_1(s),B_2(s)\}$ alt uzayına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal alt uzayı

denir (Hacısalihoğlu 2000:155).

Tanım 2.1.14. $\alpha:I\to\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri ve bu eğriye ait Frenet çatısı $\{T,N,B_1,B_2\}$ olsun. α eğrisinin yer vektörü B_1 in ortogonal tümleyeninde yani $\{T,N,B_2\}$ kümesinin gerdiği alt uzayda bulunuyorsa α eğrisine birinci tip oskülatör eğri denir ve diferansiyellenebilir λ,μ ve ς fonksiyonları için

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\varsigma(s)B_2(s)$$

şeklinde yazılır (İlarslan & Nesovic,2008: 935).

Teorem 2.1.3. $\alpha : I \to \mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında tanımlı eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri olsun. α eğrisinin birinci tip oskülatör bir eğriye kongruent olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\left(\frac{1}{\kappa_1}\left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)'\right)' + \frac{\kappa_1\kappa_3}{\kappa_2} = -\frac{1}{c},\ c \in \mathbb{R}_0,$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (İlarslan & Nesovic,2008: 935).

Tanım 2.1.15. $\alpha : I \to \mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir eğri ve bu eğriye ait Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun. α eğrisinin yer vektörü N in ortogonal tümleyeninde yani $\{T, B_1, B_2\}$ kümesinin gerdiği alt uzayda bulunuyorsa α eğrisine rektifiyan eğri denir ve diferansiyellenebilir λ, μ ve ς fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \varsigma(s)B_2(s)$$

eşitliği sağlanır (İlarslan & Nesovic,2008: 935).

Teorem 2.1.4. $\alpha : I \to \mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklid uzayında tanımlı eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri olsun. α rektifiyan bir eğriye kongruenttir gerekli ve yeterli şart,

$$\frac{\kappa_1(s)\kappa_3(s)(s+c)}{\kappa_2(s)} + \left(\frac{\kappa_1(s)\kappa_2(s) + (s+c)(\kappa_1'(s)\kappa_2(s) - \kappa_1(s)\kappa_2'(s))}{\kappa_2^2(s)\kappa_3(s)}\right)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (İlarslan & Nesovic, 2008: 24).

2.2. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Bazı Özel Vektörler ve Eğriler

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid Uzayında 3-boyutlu uzaydakine benzer şekilde dört yeni Darboux vektörü tanımlanacaktır. Ayrıca bu vektörlerin gerdiği düzlemlerde yatan eğrilerle alakalı bazı karakterizasyonlar verilecektir (Düldül 2021: 274).

Tanım 2.2.1. $\beta : I \to \mathbb{R}^4$ birim hızlı bir eğri ve β nın Frenet elemanları $\{T, N, B_1, B_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ olsun. D_1, D_2, D_3 ve D_4 vektör alanları,

$$\begin{aligned} D_1 &= B_2, \\ D_2 &= \kappa_2 T + \kappa_1 B_1, \\ D_3 &= \kappa_3 N + \kappa_2 B_2, \\ D_4 &= T \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Düldül 2021: 276).

D_1 ve D_4 eğrinin Frenet vektörleri olup, $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ kümesi eğri boyunca lineer bağımsızdır. Ayrıca, $\{D_1, D_2\}$, $\{D_3, D_4\}$ ve $\{D_2, D_3\}$ kümelerinin ortogonal oldukları basit hesaplamalarla görülebilir. $\{D_1, D_2\}$, $\{D_3, D_4\}$ ve $\{D_2, D_3\}$ kümeleri tarafından gerilen alt uzaylar sırasıyla D_1D_2-düzlemi, D_3D_4-düzlemi ve D_2D_3-düzlemi olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} T' &= D_1 \times D_2 \times T, \\ N' &= D_1 \times D_2 \times N, \\ B_1' &= D_3 \times D_4 \times B_1, \\ B_2' &= D_3 \times D_4 \times B_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dır. Yukarıdaki eşitliklerinden de görüldüğü üzere, Frenet vektörleri T ve N, D_1D_2-düzlemi etrafında dönerken, B_1 ve B_2, D_3D_4-düzlemi etrafında dönmektedir. Bu iki düzlem, 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux vektörünün oynadığı rolü üstlenirler.

Tanım 2.2.2. β, $\mathbb{R}^4$ de regüler bir eğri olmak üzere β nın yer vektörü D_1D_2- düzleminde yatıyorsa β ya D_1D_2- eğrisi denir (Düldül 2021: 276)

Tanım 2.2.3. β, $\mathbb{R}^4$ de regüler bir eğri olmak üzere β nın yer vektörü D_3D_4- düzleminde yatıyorsa β ya D_3D_4- eğrisi denir (Düldül 2021: 276).

Tanım 2.2.4. β, $\mathbb{R}^4$ de regüler bir eğri olmak üzere β nın yer vektörü D_2D_3- denkleminde yatıyorsa β ya D_2D_3- eğrisi denir (Düldül 2021: 276).

Teorem 2.2.1. $\beta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ birim hızlı ve sıfırdan farklı eğriliklere sahip $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olan bir eğri ve s eğrinin yay-parametresi olsun. β bir D_1D_2-eğrisidir gerek ve yeter şart c bir sabit olmak üzere eğrinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki

$$\left(\frac{1}{\kappa_3(s)} \left(\frac{\kappa_1(s)(s+c)}{\kappa_2(s)} \right)' \right)' + \frac{\kappa_1(s)\kappa_3(s)(s+c)}{\kappa_2(s)} = 0 \tag{2.3}$$

vardır (Düldül 2021: 276).

İspat: β, $\mathbb{R}^4$'te sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir D_1D_2-eğrisi olsun. O zaman, $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ skaler değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere D_1D_2-eğrisi tanımına göre

$$\beta(s)=\lambda(s)D_1(s)+\mu(s)D_2(s) \tag{2.4}$$

yazılabilir. (2.4) eşitliğinin s parametresine diferansiyeli alınır ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$T=\Big(\mu'(s)\kappa_2(s)+\mu(s)\kappa_2'(s)\Big)T+\big(\mu(s)\kappa_1(s)\kappa_2(s)-\mu(s)\kappa_1(s)\kappa_2(s)\big)N$$
$$+\Big(\mu'(s)\kappa_1(s)+\mu(s)\kappa_1'(s)-\lambda(s)\kappa_3(s)\Big)B_1+\big(\lambda'(s)+\mu(s)\kappa_1(s)\kappa_3(s)\big)B_2$$

dir. Bu eşitliklerden de

$$\begin{aligned}&\big(\mu(s)\kappa_2(s)\big)'-1=0,\\ &\big(\mu(s)\kappa_1(s)\big)'-\lambda(s)\kappa_3(s)=0,\\ &\lambda'(s)+\mu(s)\kappa_1(s)\kappa_3(s)=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.5) denkleminin birinci ve ikinci eşitliklerinden, c bir integral sabiti olmak üzere

$$\begin{aligned}\mu(s)&=\frac{s+c}{\kappa_2(s)},\\ \lambda(s)&=\frac{1}{\kappa_3(s)}\left(\frac{\kappa_1(s)(s+c)}{\kappa_2(s)}\right)'\end{aligned}$$

elde edilir. Bu elde edilenler (2.5) denkleminin üçüncü eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{\kappa_3(s)}\left(\frac{\kappa_1(s)(s+c)}{\kappa_2(s)}\right)'\right)'+\frac{\kappa_1(s)\kappa_3(s)(s+c)}{\kappa_2(s)}=0$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (2.3) denklemi var olsun. $X(s)$ vektörü

$$X(s)=\beta(s)-\frac{1}{\kappa_3(s)}\left(\frac{\kappa_1(s)(s+c)}{\kappa_2(s)}\right)'D_1(s)-\frac{s+c}{\kappa_2(s)}D_2(s)$$

şeklinde tanımlı olsun. $X(s)$ vektörünün s parametresine göre türevi alınırsa sıfır vektörü elde edilir. Bu da $X(s)$'nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\beta(s)$ bir D_1D_2- eğrisi kongruenttir.

Teorem 2.2.1 kullanırsa, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.1.1: $\beta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ eğriliklere sahip birim hızlı bir eğri olsun. β, D_1D_2- eğrisidir gerek ve yeter şart β rektifiyan eğridir (Düldül 2021: 278).

Teorem 2.2.2. $\beta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. β bir D_3D_4-eğrisidir gerek ve yeter şart c bir sabittir olmak üzere eğrinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki

$$c\left(\frac{1}{\kappa_1(s)}\left(\frac{\kappa_3(s)}{\kappa_2(s)}\right)'\right)' + \frac{c\kappa_1(s)\kappa_3(s)}{\kappa_2(s)} + 1 = 0 \tag{2.6}$$

vardır (Düldül 2021: 278).

İspat: β, $\mathbb{R}^4$'te sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir D_3D_4-eğrisi olsun. O zaman, $\eta(s)$ ve $\nu(s)$ skaler değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere D_3D_4-eğrisi tanımına göre

$$\beta(s) = \nu(s)D_3(s) + \eta(s)D_4(s) \tag{2.7}$$

yazılabilir. (2.7) eşitliğinin s parametresine diferansiyeli alınır ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$T = \left(-\nu(s)\kappa_3(s)\kappa_1(s) + \eta'(s)\right)T + \left(\nu'(s)\kappa_3(s) + \nu(s)\kappa_3'(s) + \eta(s)\kappa_1(s)\right)N$$
$$+\left(\nu(s)\kappa_3(s)\kappa_2(s) - \nu(s)\kappa_2(s)\kappa_3(s)\right)B_1 + \left(\nu'(s)\kappa_2(s) + \nu(s)\kappa_2'(s)\right)B_2$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$\begin{aligned} &\left(\nu(s)\kappa_2(s)\right)' = 0, \\ &\left(\nu(s)\kappa_3(s)\right)' + \eta(s)\kappa_1(s) = 0, \\ &\eta'(s) - \nu(s)\kappa_1(s)\kappa_3(s) - 1 = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.8) denkleminin birinci ve ikinci eşitliklerinden, c bir integral sabiti olmak üzere

$$\nu(s)=\frac{c}{\kappa_2(s)},$$

$$\eta(s)=-\frac{c}{\kappa_1(s)}\left(\frac{\kappa_3(s)}{\kappa_2(s)}\right)'$$

elde edilir. Bu elde edilenler (2.8) denkleminin üçüncü eşitliğinde yerine yazılırsa

$$c\left(\frac{1}{\kappa_1(s)}\left(\frac{\kappa_3(s)}{\kappa_2(s)}\right)'\right)'+\frac{c\kappa_1(s)\kappa_3(s)}{\kappa_2(s)}+1=0$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (2.6) denklemi var olsun. $Y(s)$ vektörü

$$Y(s)=\beta(s)-\frac{c}{\kappa_2(s)}D_3(s)+\frac{c}{\kappa_1(s)}\left(\frac{\kappa_3(s)}{\kappa_2(s)}\right)'D_4(s)$$

şeklinde tanımlı olsun. $Y(s)$ vektörünün s parametresine göre türevi alınırsa sıfır vektörü elde edilir. Bu da $Y(s)$'nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\beta(s)$ bir D_3D_4-eğrisi ile kongruenttir.

Teorem 2.2.2 kullanırsa, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.2: $\beta:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ birim hızlı eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri olsun. β, D_3D_4- eğrisidir gerek ve yeter şart β birinci tip oskülatör eğridir (Düldül 2021: 279).

Teorem 2.2.3. $\beta:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ birim hızlı eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri ve s yay-parametresi olsun. β bir D_2D_3-eğrisidir gerek ve yeter şart c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere eğrinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki

$$\begin{aligned}&c_2\left(\frac{\kappa_2(s)}{\kappa_1(s)}\right)'-c_1\kappa_1(s)-1=0,\\&c_1\left(\frac{\kappa_2(s)}{\kappa_3(s)}\right)'+c_2\kappa_3(s)=0\end{aligned}\tag{2.9}$$

vardır (Düldül 2021: 279).

İspat: β eğrisi bir D_2D_3-eğrisi olsun. $\sigma(s)$ ve $\delta(s)$ skaler değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere D_2D_3-eğrisi tanımına göre

$$\beta(s)=\sigma(s)D_2(s)+\delta(s)D_3(s) \tag{2.10}$$

yazılabilir. (2.10) eşitliğinin s parametresine diferansiyeli alınır ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\delta(s)\kappa_3(s)\right)'=0,\\
&\left(\sigma(s)\kappa_1(s)\right)'=0,\\
&\left(\sigma(s)\kappa_2(s)\right)'-\delta(s)\kappa_1(s)\kappa_3(s)-1=0,\\
&\left(\delta(s)\kappa_2(s)\right)'+\sigma(s)\kappa_1(s)\kappa_3(s)=0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.11) denkleminin birinci ve ikinci eşitliklerinden, c_1 ve c_2 sabit olmak üzere

$$\delta(s)=\frac{c_1}{\kappa_3(s)}, \qquad \sigma(s)=\frac{c_2}{\kappa_1(s)}$$

elde edilir. Bu elde edilenler (2.11) denkleminin üçüncü ve dördüncü eşitliklerinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (2.9) denklemi sağlansın. $Z(s)$ vektörü

$$Z(s)=\gamma(s)-\frac{c_2}{\kappa_1(s)}D_2(s)-\frac{c_1}{\kappa_3(s)}D_3(s)$$

şeklinde tanımlı olsun. $Z(s)$ vektörünün s parametresine göre türevi alınırsa sıfır vektörü elde edilir. Bu da $Z(s)$'nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ bir D_2D_3- eğrisine kongrenttir.

2.3. 4-Boyutlu Öklid Uzayında Çatılandırılmış Eğriler

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında singüler noktalı eğrilerle ilgili bir takım temel kavramlar verilecektir.

$\{\varsigma_1,\varsigma_2,\varsigma_3\}$ ortonormal bir küme olmak üzere

$$\left\{\varsigma=(\varsigma_1,\varsigma_2,\varsigma_3)\in\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 \,\middle|\, i,j=1,2,3 \text{ için } \langle\varsigma_i,\varsigma_j\rangle=\delta_{ij}\right\}$$

şeklinde tanımlı Δ_3 kümesi 6-boyutlu düzgün bir manifolddur. ν birim vektörü $\nu = \varsigma_1 \times \varsigma_2 \times \varsigma_3$ eşitliğiyle tanımlanabilir. O halde $\{\nu, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3\}$ kümesi ortonormal kümedir. (Akyiğit & Yıldız, 2021: 259).

Tanım 2.3.1. $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3)$ için $\langle \gamma', \varsigma_i \rangle = 0$ ise $(\gamma, \varsigma): J \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ ikilisine bir çatılandırılmış eğri denir. Eğer (γ, ς) bir çatılandırılmış eğri olacak şekilde bir $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3)$ varsa $\gamma : J \to \mathbb{R}^4$ eğrisine de bir çatılandırılmış baz (taban) eğrisi denir (Honda, 2018: 7).

$(\gamma, \varsigma): J \to \mathbb{R}^4 \times \Delta_3$ bir çatılandırılmış eğri olsun. O halde (γ, ς) çatılandırılmış eğrisinin $\{\nu, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3\}$ ortonormal çatısı için

$$
\begin{aligned}
\varsigma_1'(t) &= \Gamma(t)\varsigma_2(t) + \Upsilon(t)\varsigma_3(t) + \mathrm{H}(t)\nu(t),\\
\varsigma_2'(t) &= -\Gamma(t)\varsigma_1(t) + \Xi(t)\varsigma_3(t) + \mathrm{K}(t)\nu(t),\\
\varsigma_3'(t) &= -\Upsilon(t)\varsigma_1(t) - \Xi(t)\varsigma_2(t) + \mathrm{I}(t)\nu(t),\\
\nu'(t) &= -\mathrm{H}(t)\varsigma_1(t) - \mathrm{K}(t)\varsigma_2(t) - \mathrm{I}(t)\varsigma_3(t)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri verilebilir. Bu eşitlikler Serret-Frenet tipli türev formülleri olarak adlandırılır ve matris yardımıyla

$$
\begin{bmatrix} \varsigma_1' \\ \varsigma_2' \\ \varsigma_3' \\ \nu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma & \Upsilon & \mathrm{H} \\ -\Gamma & 0 & \Xi & \mathrm{K} \\ -\Upsilon & -\Xi & 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{H} & -\mathrm{K} & -\mathrm{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \\ \nu \end{bmatrix}
$$

şeklinde de ifade edilebilir. γ', $\{\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3\}$ kümesine ortogonal olduğundan ν ile paraleldir.

Ayrıca diferansiyellenebilir $\alpha : J \to \mathbb{R}$ dönüşüm vardır öyle ki:

$$\gamma'(s) = \alpha(t)\nu(t)$$

dir. Burada $\Gamma(t), \Upsilon(t), \mathrm{H}(t), \Xi(t), \mathrm{K}(t)$ ve $\mathrm{I}(t)$ düzgün eğrilik fonksiyonlarıdır. $\Gamma(t), \Upsilon(t), \mathrm{H}(t), \Xi(t), \mathrm{K}(t), \mathrm{I}(t), \alpha(t)$ ye $\gamma(t)$ nin çatılandırılmış eğrilikleri denir.

t_0 noktasının γ eğrisinin singüler noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha(t_0)=0$ olmasıdır. Singüler noktalarda eğrinin davranışını incelemek amacıyla, çatılandırılmış eğrinin uyarlanmış çatısı kullanılabilir (Honda, 2018: 7).

Teorem 2.3.1. (γ,ς) ve $(\tilde{\gamma},\tilde{\varsigma}):J\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ çatılandırılmış eğrilerinin eğrilikleri sırası ile $(\Gamma,\Upsilon,\mathrm{H},\Xi,\mathrm{K},\mathrm{I},\alpha)$ ve $(\tilde{\Gamma},\tilde{\Upsilon},\tilde{\mathrm{H}},\tilde{\Xi},\tilde{\mathrm{K}},\tilde{\mathrm{I}},\tilde{\alpha})$ olsun. $(\Gamma,\Upsilon,\mathrm{H},\Xi,\mathrm{K},\mathrm{I},\alpha)$ ve $(\tilde{\Gamma},\tilde{\Upsilon},\tilde{\mathrm{H}},\tilde{\Xi},\tilde{\mathrm{K}},\tilde{\mathrm{I}},\tilde{\alpha})$ eğrilikleri çakışık ise (γ,ς) ve $(\tilde{\gamma},\tilde{\varsigma})$ çatılandırılmış eğrileri kongruenttirler (Honda, 2018: 7).

$(\gamma,\varsigma):J\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ çatılandırılmış bir eğri ve eğrilikleri $\Gamma(t),\Upsilon(t),\mathrm{H}(t),\Xi(t),\mathrm{K}(t),\mathrm{I}(t)$ ve $\alpha(t)$ olsun, θ,φ,ψ düzgün fonksiyonları Euler açıları olmak üzere $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\Delta_3$ vektörleri

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\sin\theta & \sin\varphi sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\sin\theta\\ -\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\sin\theta\\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varsigma_1\\ \varsigma_2\\ \varsigma_3\end{bmatrix}$$

biçiminde verilebilir. $\tilde{v}$ vektörü için

$$\tilde{v}=\eta_1\times\eta_2\times\eta_3=\varsigma_1\times\varsigma_2\times\varsigma_3=v$$

olduğu basit hesaplamalarla görülebilir. $(\gamma,\varsigma):J\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ de bir çatılandırılmış eğridir. θ,φ ve ψ Euler açıları için

$$\frac{\tan\psi}{\cos\theta}=\mathrm{I}\sin\varphi-\mathrm{K}\cos\varphi,$$
$$\mathrm{H}=\cot\theta(\mathrm{I}\cos\varphi+\mathrm{K}\sin\varphi)$$

eşitlikleri mevcut ise (γ,η) boyunca uyarlanmış bir çatı oluşturulabilir ve uyarlamış çatının türev formülleri

$$\begin{bmatrix}v'\\ \eta_1'\\ \eta_2'\\ \eta_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & p & 0 & 0\\ -p & 0 & q & 0\\ 0 & -q & 0 & r\\ 0 & 0 & -r & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

biçiminde verilebilir. v,η_1,η_2,η_3 vektörleri Frenet vektörlerinin genelleştirilmişi olarak da adlandırılabilir. Burada $\left(p(t),q(t),r(t)\right)$ düzgün fonksiyonları $\gamma(t)$ eğrisinin çatılandırılmış eğrilikleri olarak adlandırılır. Euler açıları ile çatılandırılmış eğrilikler arasındaki ilişki,

$$p=-\mathrm{H}\sec\theta\sec\psi,$$
$$q=-(\Xi-\varphi)\sin\theta-\psi,$$
$$r=\frac{-\cos\theta}{\cos\psi}(\Xi-\varphi)$$

şeklindedir. Burada

$$\Gamma=-\sin\varphi\left(\theta^{'}-r\sin\psi\right),$$
$$\Upsilon=-\cos\varphi\left(\theta^{'}-r\sin\psi\right),$$
$$\Xi=\gamma\frac{\cos\psi}{\cos\theta},$$

dir (Akyiğit & Yıldız, 2021:260).

Not: Lineer bağımsızlık koşulu sağlandığında, düzenli (regüler) eğriler, çatılandırılmış eğriler için bir örnek teşkil eder.

Teorem 2.3.2. $(\gamma,\eta):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ eğrilikleri sıfırdan farklı ve p,q ve r olan çatılandırılmış bir eğri olsun. $\gamma(t)$ çatılandırılmış rektifiyan eğriye kongruent olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\beta(t)\,p(t)r(t)}{q(t)}+\left(\frac{\beta'(t)\,p(t)+\beta(t)\,p'(t)}{q^2(t)r(t)}\right)=0, \qquad \beta(t)=\int\alpha(t)dt$$

olmasıdır.

Teorem 2.3.3. $(\gamma,\eta):I\to\mathbb{R}^4\times\Delta_3$ eğrilikleri sıfırdan farklı ve p,q ve r olan çatılandırılmış bir eğri olsun. $\gamma(t)$ çatılandırılmış oskülatör eğriye kongruent olması için gerek ve yeter koşul

$$-c\frac{p(t)r(t)}{q(t)}-\left(c\frac{r'(t)q(t)+r(t)q'(t)}{q^2(t)\,p(t)}\right)=\alpha(t), \qquad c\in\mathbb{R}$$

olmasıdır.

3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİR ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİDEN ELDE EDİLMİŞ ÖZEL VEKTÖRLER VE ÖZEL EĞRİLER

Bu bölüm tezin orijinal kısmı olup 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış bir eğriden hareketle bazı özel vektörler tanımlanacaktır. Daha sonra bu özel vektörler yardımıyla elde edilen düzlemlerde yatan özel eğrilerin karakterizasyonları verilecektir.

γ, $\mathbb{R}^4$ de eğrilikleri sıfırdan farklı olan bir çatılandırılmış eğri olsun. γ boyunca uyarlanmış çatı elemanları yardımıyla $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ ve $\mathfrak{D}_4$ sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_1 &= \eta_3, \\
\mathfrak{D}_2 &= q\nu + p\eta_2, \\
\mathfrak{D}_3 &= r\eta_1 + q\eta_3, \\
\mathfrak{D}_4 &= \nu
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathfrak{D}_4$ eğrinin uyarlanmış çatı elemanları olup, $\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4\}$ kümesi eğri boyunca lineer bağımsızdır. Ayrıca, $\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}$, $\{\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4\}$ ve $\{\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3\}$ kümelerinin ortogonal oldukları açıktır. $\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}$, $\{\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4\}$ ve $\{\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3\}$ kümeleri tarafından gerilen alt uzaylar sırasıyla $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$düzlemi, $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$düzlemi ve $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3-$düzlemi olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\nu' &= \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \nu, \\
\eta_1' &= \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \eta_1, \\
\eta_2' &= \mathfrak{D}_3 \times \mathfrak{D}_4 \times \eta_2, \\
\eta_3' &= \mathfrak{D}_3 \times \mathfrak{D}_4 \times \eta_3
\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitliklerden de görüldüğü üzere, ν ve η_1, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$düzlemi etrafında dönerken, η_2 ve η_3, $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$düzlemi etrafında dönmektedir. Bu iki düzlem, 3-boyutlu Öklid uzayında uyarlanmış çatıdan elde edilmiş Darboux vektörünün oynadığı rolü üstlenir.

Tanım 3.1. γ, $\mathbb{R}^4$ de çatılandırılmış bir eğri olmak üzere γ nın yer vektörü $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$ düzleminde yatıyorsa γ ya çatılandırılmış $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$ eğrisi denir.

Tanım 3.2. γ, $\mathbb{R}^4$ de çatılandırılmış bir eğri olmak üzere γ nın yer vektörü $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$ düzleminde yatıyorsa γ ya çatılandırılmış $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$ eğrisi denir.

Tanım 3.3. γ, $\mathbb{R}^4$ de çatılandırılmış bir eğri olmak üzere γ nın yer vektörü $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3-$ düzleminde yatıyorsa γ ya çatılandırılmış $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3-$ eğrisi denir.

Teorem 3.1. γ eğrilikleri sıfırdan farklı bir çatılandırılmış eğri olsun γ , bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$ eğrisidir gerek ve yeter şart

$$\left(\left(\frac{1}{r(t)}\left(\frac{p(t)}{q(t)}\left(\int\alpha(t)dt\right)\right)\right)'\right)'+\frac{p(t)r(t)}{q(t)}\left(\int\alpha(t)dt\right)=0 \tag{3.1}$$

olmasıdır.

İspat: γ , $\mathbb{R}^4$ te sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$eğrisi olsun. O zaman, çatılandırılmış $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$eğrisi tanımına göre λ ve μ skaler değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma(t)=\lambda(t)\mathfrak{D}_1(t)+\mu(t)\mathfrak{D}_2(t) \tag{3.2}$$

yazılabilir. (3.2) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\alpha(t)\nu(t)=&\left(\mu'(t)q(t)\right)\nu(t)+\left(\mu(t)q(t)p(t)-\mu(t)q(t)p(t)\right)\eta_1(t)\\&+\left(-\lambda(t)r(t)+\mu'(t)p(t)+\mu(t)p'(t)\right)\eta_2(t)+\left(\lambda'(t)+\mu(t)p(t)r(t)\right)\eta_3(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}&\alpha(t)=\mu'(t)q(t)+\mu(t)q'(t),\\&-\lambda(t)r(t)+\mu'(t)p(t)+\mu(t)p'(t)=0,\\&\lambda'(t)+\mu(t)p(t)r(t)=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.3) denkleminin birinci ve ikinci eşitliklerinden

$$\mu(t)=\frac{1}{q(t)}\left(\int\alpha(t)dt\right),\qquad \lambda(t)=\frac{1}{r(t)}\left(\frac{p(t)}{q(t)}\left(\int\alpha(t)dt\right)\right)'$$

elde edilir. $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$, (3.3) denkleminin üçüncü eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\left(\frac{1}{r(t)}\left(\frac{p(t)}{q(t)}\left(\int \alpha(t)dt\right)\right)\right)'\right)' + \frac{p(t)r(t)}{q(t)}\left(\int \alpha(t)dt\right) = 0$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (3.1) denklemi var olsun. $X(t)$ vektörü

$$X(t) = \gamma(t) - \frac{1}{r(t)}\left(\frac{p(t)}{q(t)}\left(\int \alpha(t)dt\right)\right)' \mathfrak{D}_1(t) - \frac{1}{q(t)}\left(\int \alpha(t)dt\right)\mathfrak{D}_2(t)$$

şeklinde tanımlı olsun. $X(t)$ vektörünün t parametresine göre türevi alınırsa sıfır vektörü elde edilir. Bu da $X(t)$'nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\gamma(t)$ bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$ eğrisi ile kongruenttir.

Teorem 2.3.2 kullanılırsa, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1. $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir çatılandırılmış eğri olsun. γ, bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-$eğrisidir gerek ve yeter şart γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğridir.

Teorem 3.2. γ, $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı eğriliklere sahip çatılandırılmış eğri olsun. γ, bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$eğrisidir gerek ve yeter şart c bir sabit olmak üzere eğrinin eğrilikleri arasında aşağıdaki ilişki

$$c\left(\frac{1}{p(t)}\left(\frac{r(t)}{q(t)}\right)'\right)' + \frac{cp(t)r(t)}{q(t)} + \alpha(t) = 0 \tag{3.4}$$

vardır.

İspat: γ, $\mathbb{R}^4$ te sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$eğrisi olsun. O zaman $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ skaler değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere çatılandırılmış $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$ eğrisi tanımına göre

$$\gamma(t) = \lambda(t)\mathfrak{D}_3(t) + \mu(t)\mathfrak{D}_4(t) \tag{3.5}$$

yazılabilir. (3.5) eşitliğinin t ye göre türevi alınır ve uyarlanmış çatı formülleri kullanılırsa

$$\alpha(t)\nu(t)=\left(-\lambda(t)p(t)r(t)\right)\nu(t)+\left(\lambda'(t)r(t)+\lambda(t)r'(t)+\mu(t)p(t)\right)\eta_1(t)$$

$$+\left(\lambda(t)r(t)q(t)-\lambda(t)r(t)q(t)\right)\eta_2(t)+\left(\lambda'(t)q(t)+\lambda(t)q'(t)\right)\eta_3(t)$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$\begin{aligned}&\alpha(t)=-\lambda(t)p(t)r(t)+\mu'(t),\\&\left(\lambda(t)r(t)\right)'+\mu(t)p(t)=0,\\&\left(\lambda(t)q(t)\right)'=0\end{aligned}\tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) denkleminin ikinci ve üçüncü eşitliklerinden, c bir integral sabiti olmak üzere;

$$\lambda(t)=\frac{c}{q(t)},$$

$$\mu(t)=-\frac{1}{p(t)}\left(\frac{cr(t)}{q(t)}\right)'$$

elde edilir. Bu elde edilenler (3.6) denkleminin birinci eşitliğinde yerine yazılırsa

$$c\left(\frac{1}{p(t)}\left(\frac{r(t)}{q(t)}\right)'\right)'+\frac{cp(t)r(t)}{q(t)}+\alpha(t)=0$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (3.6) denklemi var olsun. $Y(t)$ vektörü

$$Y(t)=\gamma(t)-\frac{c}{q(t)}\mathfrak{D}_3(t)+\frac{1}{p(t)}\left(\frac{cr(t)}{q(t)}\right)'\mathfrak{D}_4(t)$$

şeklinde tanımlı olsun. $Y(t)$ vektörünün t parametresine göre türevi alınırsa sıfır vektörü elde edilir. Bu da $Y(t)$'nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\gamma(t)$ bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4-$eğrisi kongruenttir demektir.

Teorem 2.3.3 kullanılırsa, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2. $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ sıfırdan farklı p, q, r eğriliklere sahip çatılandırılmış bir eğri olsun. γ, bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4$ – eğrisidir gerek ve yeter şart γ bir çatılandırılmış oskülatör eğridir.

Teorem 3.3. $\gamma : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ eğrilikleri sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. γ bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 -$ eğrisidir gerek ve yeter şart c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler

$$\begin{aligned} & c_2\left(\frac{q(t)}{p(t)}\right)' - c_1 p(t) - \alpha(t) = 0, \\ & c_1\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)' + c_2 r(t) = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

vardır.

İspat: γ, $\mathbb{R}^4$ te sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir çatılandırılmış $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 -$ eğrisi olsun. O zaman $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ skaler değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere çatılandırılmış $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 -$ eğrisi tanımına göre

$$\gamma(t) = \lambda(t)\mathfrak{D}_2(t) + \mu(t)\mathfrak{D}_3(t) \tag{3.8}$$

yazılabilir. (3.8) eşitliğinin t ye göre türevini alınır ve uyarlanmış çatı formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(t)\nu(t) = {} & \big(\lambda'(t)q(t) + \lambda(t)q'(t) - \mu(t)r(t)p(t)\big)\nu(t) + \big(\mu'(t)r(t) + \mu(t)r'(t)\big)\eta_1(t) \\ & + \big(\lambda'(t)p(t) + \lambda(t)p'(t)\big)\eta_2(t) + \big(\lambda(t)p(t)r(t) + \mu'(t)q(t) + \mu(t)q'(t)\big)\eta_3(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$\begin{aligned} & \alpha(t) = \big(\lambda(t)q(t)\big)' - \mu(t)r(t)p(t), \\ & \mu(t) = \frac{c_1}{r(t)}, \\ & \lambda(t) = \frac{c_2}{p(t)}, \\ & \lambda(t)p(t)r(t) + \big(\mu(t)q(t)\big)' = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) denkleminin ikinci ve üçüncü eşitliklerinden, c_1 ve c_2 integral sabitleri olmak üzere

$$\alpha(t)=\left(\frac{c_2 q(t)}{p(t)}\right)'-c_1 p(t),$$

$$c_2 r(t)+\left(\frac{c_1 q(t)}{r(t)}\right)'=0$$

elde edilir. Bu elde edilenler (3.9) denkleminin birinci ve dördüncü eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$c_2\left(\frac{q(t)}{p(t)}\right)'-c_1 p(t)-\alpha(t)=0,$$
$$c_1\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)'+c_2 r(t)=0$$

elde edilir.

Tersine kabul edelim ki (3.7) denklemleri var olsun. $Z(t)$ vektörü

$$Z(t)=\gamma(t)-\frac{c_2}{p(t)}\mathfrak{D}_2(t)-\frac{c_1}{r(t)}\mathfrak{D}_3(t)$$

şeklinde tanımlı olsun. $Z(t)$ vektörünün t parametresine göre türevi alınırsa sıfır vektörü elde edilir. Bu da $\gamma(t)$'nin sabit bir vektör olduğunu gösterir. O halde, $\gamma(t)$; çatılandırılmış $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3-$ eğrisine kongruenttir.

KAYNAKÇA

Akyiğit, M., & Yıldız, Ö. G. (2021). On the Framed Normal Curves in Euclidean 4 space. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 4*(4), 258-263.

Ateş, M. & Akyiğit, M. (2023). Framed general and framed slant helices in the Euclidean -space. *Sakarya Üniversitesi, Türkiye*.

Chen, B.Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane, *Amer. Math. Monthly*, 110(2), 147–152.

Camcı Ç., İlarslan K., Kula L. & Hacısalihoğlu H.H. (2009). Harmonic curvatures and generalized helices in En . *Chaos, Solitons & Fractals* 40 (5): 2590-2596.

Düldül, M. (2021). Vector fields and planes in E^4 which play the role of Darboux vector. *Turkish Journal of Mathematics, 44*(1), 274-282.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferansiyel Geometri 1. *Ankara Üniversitesi, Ankara*, 1-270.

Honda, S., & M. Takahashi, M. (2018). Framed Curves in the Euclidean Space, *Advances in Geometry 16*, 256-276.

İlarslan, K., & Nesovic, E. (2008). Some characterizations of osculating curve in the Euclidean spaces. *Demonstratio Mathematica, 41*(4), 931-940.

İlarslan, K., & Nesovic, E. (2008). Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space $\mathbb{R}^4$. *Turkish Journal of Mathematics, 32*(1), 21-30.

O'Neill, B. (2006). Elementary Differential Geometry Revised Second Edition, *Department of Mathematics University of California, Los Angeles.*

Okuyucu, O. Z. & Canbirdi, M. (2021). Framed slant helices in Euclidean 3-space, *Adv. Differ. Equ.*, 2021. 1-14.

Özyılmaz, E., & Yılmaz, S. (2009). Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-Space. *Int. J. Open Problems Compt. Math, 2(2), 168-174.*

Sabuncuoğlu, A. (2014). Diferansiyel Geometri V. *Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara,* 1-514.

Soyfidan, T. (2011). Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti, *Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.*

Şavlı, M. (2022). 4-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış oskülatör ve rektifiyan eğriler. Master's thesis, *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Wang, Y., Pei, D. & Gao, R. (2019). Generic Properties of Framed Rectifying Curves, *Mathematics* 7(1), 37.

Yüce, S. (2020). Öklid Uzayında Diferansiyrl Geometri *5. Baskı, Pegem Akademi*

Williams, M. Z., & Stein, F. M. (1964). A triple product of vectors in four-space. *Mathematics Magazine*, 37(4), 230-235.