

**ESKİŞEHİR**  
**ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK**  
**ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Ana Bilim Dalı**

**KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU**  
**ÜZERİNE**

**Özlem İÇER**  
**Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı**  
**Dr. Öğr. Üyesi Önder Gökmen YILDIZ**

**BİLECİK, 2019**  
**Ref. No:10284975**



**ESKİŞEHİR**  
**ANADOLU ÜNİVERSİTESİ**



**BİLECİK**  
**ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Ana Bilim Dalı**

**KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU**  
**ÜZERİNE**

**Özlem İÇER**  
**Yüksek Lisans Tezi**

**Tez Danışmanı**  
**Dr. Öğr. Üyesi Önder Gökmen YILDIZ**

**BİLECİK, 2019**



**ESKİŞEHİR**  
**ANADOLU UNIVERSITY**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI**  
**ÜNİVERSİTESİ**  
**BİLECİK**  
**ŞEYH EDEBALI UNIVERSITY**

**Graduate School of Sciences**  
**Department of Mathematics**

**ON THE EVOLUTION OF QUATERNIONIC**  
**CURVES**

**Özlem İÇER**  
**Master's Thesis**

**Thesis Advisor**  
**Asst. Prof. Dr. Önder Gökmen YILDIZ**

**BİLECİK, 2019**



**BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS**

**JÜRİ ONAY FORMU**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 19/07/2019 tarih ve 38/01 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 05/08/2019 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Özlem İçer'in "Kuaterniyonik Eğrilerin Evolüsyonu Üzerine" başlıklı tez çalışması Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

**ÜYE (TEZ DANIŞMANI) : Dr. Öğr. Üyesi Önder Gökmen YILDIZ**

**JÜRİ BAŞKANI : Prof. Dr. Murat TOSUN**

**ÜYE : Dr. Öğr. Üyesi Şirin AKTAY**

**ONAY**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun  
.../.../..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

**İMZA/ MÜHÜR**

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalıŐmasını araŐtırılmasında, planlanmasında ve oluŐturulmasında bana katkıda bulunan, bu çalışmanın her aŐamasında yardımını, ilgi ve desteğini esirgemeyen, önerileri ve bilgilendirmesi ile beni yönlendiren, özenle tezimin bilimsel temeller ile şekillenmesini sağlayan, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer ve çok değerli danıŐman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Önder Gökmen YILDIZ'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca desteklerini her zaman hissettiğim, beni büyük bir sabırla destekleyen, cesaretlendiren aileme ve sevgili eŐim Gökhan İÇER'e teşekkürlerimi sunarım.

## **BEYANNAME**

Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzu'na uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada, tez içindeki tüm verileri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun olarak sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu Üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmada kullanılmadığını beyan ederim.

...../...../ 2019

**Özlem İçer**

## KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU ÜZERİNE

### ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. İkinci kısımda  $n$ -boyutlu Öklid uzayı ve kuaterniyonlar kümesinde temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca kuaterniyonik eğri tanımı ve kuaterniyonik eğri için Frenet formülleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında elastik olmayan eğri akışı incelenmiştir. Eğrinin Frenet çatısı ve eğrilikleri için evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra integrallenebilme koşulu verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde kuaterniyonik eğrinin elastik olmayan akışı incelenmiştir. Kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı ve eğrilikleri ile ilgili evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Elastik olmayan kuaterniyonik eğri akışı kullanılarak integrallenme koşulu verilmiştir. Son olarak eğriliklerin evolüsyon denklemleri ile alakalı örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kuaterniyon; Kuaterniyonik Eğri; Elastik Olmayan Eğri Akışı; Evolüsyon.

## ON THE EVOLUTION OF QUATERNIONIC CURVES

### ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter introduction part has been presented. In the second chapter, basic concept in the  $n$ - dimensional Euclidean space and quaternion set are introduced. Moreover, definition of quaternionic curve and Frenet formula of quaternionic curve are given.

In the third chapter, inextensible flow of curve in  $n$ -dimensional Euclidean space is examined. Evolution equation of Frenet frame and curvature are obtained. Then integrability condition is given.

The fourth chapter is the original parts of this study. In this chapter, inextensible flow of quaternionic curve is examined. Evolution equation of Frenet frame and curvatures are obtained. Then, by using inextensible flow of quaternionic curve, integrability condition is given. Finally, examples are given about evolution of curvatures.

**Key Words:** Quaternion; Quaternionic Curve; Inextensible Curve Flow; Evolution.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
TEŞEKKÜR .....	
BEYANNAME .....	
ÖZET.....	I
ABSTRACT .....	II
İÇİNDEKİLER .....	III
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IV
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....	V
1.GİRİŞ .....	1
2.TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....	3
2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar .....	3
2.2 Reel Kuaterniyonlar .....	5
3. $\mathbb{E}^n$ DE EĞRİLERİN EVOLÜSYONLARI .....	13
4. $\mathbb{E}^4$ DE EĞRİLERİN EVOLÜSYONLARI.....	23
KAYNAKLAR .....	38
ÖZ GEÇMİŞ.....	

**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<b>Şekil 4.1.</b> $\kappa$ nın evolüsyonu .....	31
<b>Şekil 4.2.</b> $k$ nın evolüsyonu.....	31
<b>Şekil 4.3.</b> $(r- \kappa)$ nın evolüsyonu .....	32
<b>Şekil 4.4.</b> $\kappa$ nın evolüsyonu .....	33
<b>Şekil 4.5.</b> $k$ nın evolüsyonu.....	33
<b>Şekil 4.6.</b> $(r- \kappa)$ nın evolüsyonu .....	34

### SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel iç çarpım uzayı
$\mathbb{E}^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$V$	:	Vektör uzayı
$I$	:	Öklid uzayında bir açık aralık
$\langle, \rangle$	:	İç çarpım
$\ , \ $	:	Norm
$V_i$	:	$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $i$ – yinci Frenet vektörü
$k_i$	:	$\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $i$ – yinci Frenet eğriliği
$q$	:	Herhangi bir kuaterniyon
$\mathbb{Q}$	:	Reel kuaterniyonlar kümesi
$S_q$	:	Kuaterniyonun skaler kısmı
$V_q$	:	Kuaterniyonun vektörel kısmı
$\hat{q}$	:	Kuaterniyonun eşleniği
$h(,)$	:	Kuaterniyonik iç çarpım
$\ q\ $	:	Kuaterniyonun normu
$q^{-1}$	:	Kuaterniyonun tersi
$q_0$	:	Birim kuaterniyonu
$\{t, n, b\}$	:	Uzaysan kuaterniyonik eğrilerin Frenet vektörleri
$\{T, N_1, N_2, N_3\}$	:	Kuaterniyonik eğrinin Frenet vektörleri
$\{\kappa, k, (r - \kappa)\}$	:	Kuaterniyonik eğrinin Frenet eğrilikleri
$^T$	:	Kuaterniyonun Transpozu

## 1. GİRİŞ

Fizik, kimya ve biyolojide çoğu problemin özü şekillerin dinamikleri yardımıyla açıklanmaktadır. Şekillerin dinamiği dendiği zaman akla ilk gelen eğri akışıdır. Eğri akışı 1-parametrelili bir eğri ailesinin zamana göre değişimidir (evolüsyonudur). Bir eğrinin evolüsyonunu incelemek demek aslında akışını incelemektir.

Eğer bir eğrinin yay uzunluğu korunuyor ise yani hiçbir etkenden etkilenmiyorsa bu eğrinin akışı elastik değildir. Elastik olmayan eğri akışının bilgisayarlı görüntüleme (Lu vd., 1993; Kass vd.,1987), bilgisayar animasyonları da (Desbrun ve Cani, 1998), yapısal mekanikte (Unger, 1991) olduğu gibi bir çok uygulaması bulunmaktadır. Elastik olmayan eğri akışı gerilim enerjisine sahip olmayan hareketlerin incelenmesinde önemli bir yere sahiptir (Chirikjian ve Burrdick, 1990; Gage ve Hamilton, 1986; Grayson, 1987). Kwon ve Park,  $\mathbb{E}^2$  de ve  $\mathbb{E}^3$  de eğriler için akış tanımını verip elastik olmama koşullarını incelediler (Kwon ve Park, 1999;Kwon vd., 2005). Abdel-All ve arkadaşları n-boyutlu Öklid uzayında eğri akışından hareketle eğrinin eğrilikleri için evolüsyon denklemlerini elde ettiler (Abdel-All, 2014). Körpınar ve Baş elastik olmayan kuaterniyonik eğri akışı üzerine çalıştılar (Körpınar ve Baş, 2016).

Kuaterniyonlar teorisi ilk olarak 1843 yılında matematikçi William Rowan Hamilton tarafından elde edilmiştir. Hamilton'ın son yirmi iki yılını kapsayan çalışmalarının konusu dördeyler (kuaterniyonlar) kuramı olmuştur. 1829 yılında karmaşık sayıların, biri gerçek diğeri sanal olmak üzere iki eksen yardımıyla düzlemde gösterilebildiğini öğrenen Hamilton, karmaşık sayılara karşılık gelecek bütün işlemlerin yapılmasını olanaklı kılacak bir cebirsel gösterim bulmaya yöneldi. Bu konuda 1833 yılında yayınladığı ilk çalışmalarında, karmaşık sayıların tek bir sayı yerine sayı ikilileri ile anlatılabileceğini gösterdi. Daha sonra 3-boyutlu uzaydaki noktaların, gelişigüzel seçilmiş yapay koordinatlara bağlı olmayan cebirsel gösterimlerini bulmak için çalıştı. Bunun sonucunda 3-boyutlu uzaydaki noktaların üçlülerle değil ancak dörtlüler ile gösteriminin olanaklı olduğunu gördü. Yani kuaterniyonlar kompleks sayılardan hareketle elde edilmiş bir sayı sistemidir. Kuaterniyonlar bir skaler ve bir vektörün toplamı olarak yazılabilir. Kuaterniyonlar sıralı dört sayının dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır.  $\mathbb{E}^3$  ve  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri Bharathi ve Nagaraj tarafından verilmiştir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

Bu tez çalışmasında, 4-boyutlu kuaterniyonlar uzayında, bir eğrinin akışından hareketle eğrinin ve eğriliklerin evolüsyon (zamana göre değişim) denklemleri elde edildi. Akışın elastik olmama durumuyla ilgili sonuçlar verildi. Akışın elastik olmaması durumunda integrallenme koşulu elde edildi. Son olarak eğriliklerin evolüsyonlarıyla ilgili örnekler verildi.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

### 2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1**  $A$  boştan farklı bir cümle ve  $V, \mathbb{K}$  cismi üstünde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan  $\psi: A \times A \rightarrow V$  biçiminde bir  $\psi$  fonksiyonu var ise,  $A$  kümesine  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir (Hacısalihoglu, 2000),

- i.  $\forall P_1, P_2, P_3 \in A$  için  $\psi(P_1, P_2) + \psi(P_2, P_3) = \psi(P_1, P_3)$
- ii.  $\forall P_1 \in A$  ve  $\vartheta \in V$  için  $\psi(P_1, P_2) = \vartheta$  olacak şekilde tek bir  $P_2 \in A$  noktası vardır.

**Tanım 2.1.2**  $A$  bir reel afin uzay ve  $A$  ile birleşen vektör uzayını  $V$  olsun.  $V$  vektör uzayında

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlı ise  $A$  afin uzaya  $n$ -boyutlu Öklid uzayı denir ve  $\mathbb{E}^n$  ile gösterilir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.3**  $X \in \mathbb{E}^n$  olmak üzere  $X$  vektörünün normu;

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.4**  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayı ve  $I \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere;

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$$

fonksiyonu diferansiyellenebilir ise  $\alpha$  ya  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri denir ve  $M$  ile gösterilir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.5**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$  eğrisi verilsin. Her  $t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.6**  $\mathbb{E}^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Lineer bağımsız  $\{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$  sisteminden elde edilen  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  ortonormal sistemine  $M$  eğrisinin  $\alpha(t) \in M$  noktasındaki Serret-Frenet  $r$ -ayaklısı veya kısaca Frenet çatısı denir. Burada  $\forall \alpha(t) \in M$  için  $V_i(t), 1 \leq i \leq r$  vektörlerinin her birine  $\alpha(t)$  noktasında bir Frenet vektörü denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.7**  $\mathbb{E}^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş ve  $\alpha$  eğrisin yay parametresi  $s \in I$  olsun.  $\alpha$  eğrisin Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olmak üzere

$$1 \leq i \leq r \text{ için } k_i: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan  $k_i$  fonksiyonuna  $M$  eğrisinin  $i$  – yinci eğrilik fonksiyonu,  $k_i \in \mathbb{R}$  sayısına da  $M$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki  $i$  – yinci eğriliği denir. Burada  $'$  ile eğrinin yay parametresine göre türev gösterilmektedir.

**Tanım 2.1.8**  $\mathbb{E}^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğrinin yay parametresi  $s \in I$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin Frenet  $r$ -ayaklısı da  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  şeklinde verilmiş olsun.  $\alpha$  eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğrilikleri  $k_i(s), 1 \leq i \leq r$  olmak üzere Frenet formülleri

- i.  $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$
- ii.  $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), i \neq 1$
- iii.  $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoglu, 2000). Frenet formülleri

$$E = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \text{ ve } Q = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$E_s = Q \cdot E \quad (2.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

## 2.2 Reel Kuaterniyonlar

Bu bölümde kuaterniyonlar ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

**Tanım 2.2.1** Reel bir kuaterniyon, dört reel sayının,  $+1, e_1, e_2, e_3$  gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Dört birimden  $+1$  ile gösterilen reel bir sayı olmak üzere diğer birimler arasında aşağıdaki gibi ilişki vardır,

- i.  $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$ ,
- ii.  $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1, e_3 \wedge e_1 = e_2$ ,
- iii.  $e_2 \wedge e_1 = -e_3, e_3 \wedge e_2 = -e_1, e_1 \wedge e_3 = -e_2$ .

$a, b, c, d$  reel sayı ve  $e_1, e_2, e_3$  birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının dik koordinat sistemindeki baz vektörleri olmak üzere

$$q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$$

şeklinde gösterilir.

$q$  kuaterniyonunu  $S_q$  skaler ve  $V_q$  vektörel kısmı olmak üzere

$$S_q = d, V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$$

şeklinde iki kısma ayrılabilir. Yani bir reel kuaterniyon

$$q = S_q + V_q$$

biçiminde ifade edilebilir. O halde reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{Q} = \{q | q = ae_1 + be_2 + ce_3 + d; a, b, c, d \in \mathbb{R}, e_{1-3} \in \mathbb{R}^3\}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 2.2.2** Reel kuaterniyonlar kümesi üzerinde toplama işlemi;

$$S_{q_1} + S_{q_2} = S_{q_1 \oplus q_2} \text{ ve } V_{q_1} + V_{q_2} = V_{q_1 \oplus q_2}$$

olmak üzere

$$\oplus: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + V_{q_1 \oplus q_2}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada  $S_{q_1} + S_{q_2}$  işlemindeki “+”,  $\mathbb{R}$  üzerindeki toplama işlemi,  $V_{q_1} + V_{q_2}$  deki “+” ise  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki toplama işlemidir.

O halde  $(\mathbb{Q}, \oplus)$  ikilisi değişmeli bir gruptur. Bu grubun etkisiz elemanı sıfır kuaterniyon adımı alır ve  $(0,0,0,0)$  sıralı dördlüsünden oluşur.

**Tanım 2.2.3**  $\mathbb{Q}$  kuaterniyonlar kümesi üzerindeki skaler ile çarpma işlemi;

$$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

şeklinde tanımlıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i.  $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q};$
- ii.  $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) + (\lambda_2 \odot q), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q \in \mathbb{Q};$
- iii.  $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q);$
- iv.  $1 \odot q = q.$

O halde  $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$  sistemi bir reel vektör uzayıdır. Bundan sonra  $\mathbb{Q}$  da ki toplama  $\oplus$  ve  $\odot$  skalerle çarpma işlemleri, sırasıyla “+” ve “.” İle gösterilecektir.

**Tanım 2.2.4** Reel kuaterniyonlar kümesi  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$  alalım. Burada;  $\mathbb{Q}$  da ki kuaterniyonik çarpma işlemi;

$$q_1 = d_1 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3$$

$$q_2 = d_2 + a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3$$

olmak üzere;

$$\times: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$$

$$\begin{aligned}
q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3) \times (d_2 + a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3) \\
&= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)e_1 \\
&\quad + (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1d_2 - a_1c_2) + (d_1c_2 + d_2c_1 + a_1b_2 - b_1a_2)e_3
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca bu çarpım

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1}S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1}V_{q_2} + S_{q_2}V_{q_1} + V_{q_1} \wedge V_{q_2}$$

şeklinde de verilebilir.

Bu durumda kuaterniyon çarpımının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu görülebilir.

- i. İki kuaterniyonun çarpımı yine bir kuaterniyondur.
- ii. Kuaterniyon çarpımı birleşme özelliğine sahiptir.
- iii. Kuaterniyon çarpımı dağılma özelliğine sahiptir.

Bunlara ek olarak kuaterniyon çarpımının değişme özelliğine sahip olmadığı da söylenebilir. O halde  $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$  kümesinin asosyatif (birleşimli) bir cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir. Bu cebirin bir tabanı  $\{+1, e_1, e_2, e_3\}$  ve boyutu ise 4 tür. Özel olarak

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$$

olabilmesi için  $q_1$  ve  $q_2$  birer skalar veya vektör kısımları ( $V_{q_2} = \lambda V_{q_1}$ ) orantılı olmalıdır.

**Tanım 2.2.5**  $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$  için eşitlik bağıntısı

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \text{ için } q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2}$$

biçiminde tanımlıdır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.6** Reel kuaterniyonlar kümesi  $\mathbb{Q}$  daki seçtiğimiz iki kuaterniyonun farkı

$$q_1 - q_2 = (S_{q_1} - S_{q_2}) + (V_{q_1} - V_{q_2})$$

şeklinde tanımlıdır (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.7** Reel kuaterniyonlar kümesi  $\mathbb{Q}$  da eşlenik  $q = S_q + V_q \in \mathbb{Q}$  olmak üzere

$$\hat{\cdot}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$q \rightarrow \hat{q} = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\hat{q}$  kuaterniyonu  $q$  nun eşleniğidir.

Bir kuaterniyonun eşleniği ile çarpımı

$$\begin{aligned} q \times \hat{q} &= (d + ae_1 + be_2 + ce_3) \times (d - ae_1 - be_2 - ce_3) \\ &= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$q \times \hat{q} = \hat{q} \times q > 0, q \neq 0,$$

$$q \times \hat{q} = \hat{q} \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

olduğu kolayca görülür. Eşlenik işlemi

$$\text{i. } \widehat{(aq_1 + bq_2)} = a\hat{q}_1 + b\hat{q}_2$$

$$\text{ii. } \widehat{(q_1 \times q_2)} = \hat{q}_1 \times \hat{q}_2$$

$$\text{iii. } \hat{\hat{q}} = q$$

özelliklerine sahiptir. Bu özelliklere kuaterniyonun eşlenik özellikleri denir.

**Tanım 2.2.8** Reel kuaterniyonlar kümesi  $\mathbb{Q}$  da reel değerli, simetrik, bilinear  $h$  fonksiyonu

$$h: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times \hat{q}_2 \times q_2 \times \hat{q}_1)$$

şeklinde tanımlıdır.  $h$  fonksiyonuna kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir (Bharathi ve Nagaraj,1985).

**Tanım 2.2.9**  $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$  kuaterniyonları için  $h(q_1, q_2) = 0$  şartını sağlıyorsa  $q_1, q_2$  kuaterniyonlarına  $h$ -ortogonal denir.

**Tanım 2.2.10**  $\mathbb{Q}$  üzerindeki norm tanımı  $q \in \mathbb{Q}$  için şu şekilde

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \times \hat{q} = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

tanımlıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.2.11** Bir  $q \in \mathbb{Q}$  kuaterniyonun tersini

$$(\ )^{-1}: \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} - \{0\}$$

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\hat{q}}{\|q\|}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Böylece  $\mathbb{Q}$  üzerinde bölme işlemi tanımlanmış olur.

**Tanım 2.2.12**  $q_2 \neq 0$  olmak üzere  $q_1$  kuaterniyonunun  $q_2$  kuaterniyonuna bölebilmek için  $q_1, q_2^{-1}$  ile sağdan ve soldan çarpılır. Bunun nedeni ise kuaterniyon çarpımının değişme özelliğinin olmamasıdır. O halde

$$r_1 = q_1 \times q_2^{-1}$$

$$r_2 = q_2^{-1} \times q_1$$

ifadeleri elde edilir. Burada  $r_1$  kuaterniyonuna  $q_1$  kuaterniyonunun  $q_2$  kuaterniyonu ile sağdan bölümü,  $r_2$  kuaterniyonuna  $q_1$  kuaterniyonunun  $q_2$  kuaterniyonu ile soldan bölümü denir. Burada  $r_1$  ve  $r_2$  birbirinden farklıdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.13** Birim kuaterniyonlar  $q_0$  ile gösterilir ve normu "1" dir. Buradan vektörlerde olduğu gibi herhangi bir birim kuaterniyon

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \times \hat{q} = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

olmak üzere

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

şeklinde elde edilir (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.14** Reel kuaterniyonlar kümesi  $\mathbb{Q}$  da  $s \in I = [0,1]$  olmak üzere,

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s)e_i, \quad (1 \leq i \leq 3)$$

biçiminde tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

**Teorem 2.2.1**  $\alpha$  bir uzaysal kuaterniyonik eğri olsun.  $s \in I = [0,1]$ ,  $\alpha$  eğrisinin bir parametresi olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  Frenet vektörleri;

$$t(s) = \frac{1}{v(s)} \alpha'(s), \quad \|\alpha'(s)\| = v(s)$$

$$n(s) = b(s) \times t(s)$$

$$b(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s) + v(s)v'(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s) + v(s)v'(s)\|}$$

biçiminde elde edilir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

**Teorem 2.2.2**  $s \in I = [0,1]$  yay parametresi ile verilen  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisi için  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  ve eğrilikleri de  $k(s), r(s)$  olmak üzere,  $\alpha(s)$  eğrisi boyunca  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  vektörlerinin türevleri ve eğrilikler arasındaki ilişki

$$t'(s) = k(s)n(s)$$

$$n'(s) = -k(s)t(s) + r(s)b(s)$$

$$b'(s) = -r(s)n(s)$$

şeklindedir (Bharathi ve Nagaraj, 1985). Bu formüllere Frenet formülleri denir ve aşağıdaki gibi matris formunda gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

**Tanım 2.2.15** Reel kuaterniyonlar kümesi  $\mathbb{Q}$  üzerinde  $s \in I = [0,1]$  olmak üzere

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(s) e_i, \quad (1 \leq i \leq 4), \quad e_4 = 1$$

biçiminde tanımlanan eğriye bir reel kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

**Teorem 2.2.3**  $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}$ , kuaterniyonik eğrisi herhangi bir  $s \in I = [0,1]$  parametresi ile verilmiş olsun.  $\beta$  eğrisinin  $\beta(s)$  noktasındaki  $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$  Frenet vektörleri

$$T(s) = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}$$

$$N_1(s) = \frac{\|\beta'(s)\|^2 \beta''(s) - h(\beta'(s), \beta''(s))\beta'(s)}{\|\|\beta'(s)\|^2 \beta''(s) - h(\beta'(s), \beta''(s))\beta'(s)\|}$$

$$N_2(s) = \mu N_3(s) \wedge T(s) \wedge N_1(s)$$

$$N_3(s) = \mu \frac{T(s) \wedge N_1(s) \wedge \beta'''(s)}{\|T(s) \wedge N_1(s) \wedge \beta'''(s)\|}, \quad (\mu \neq \pm 1)$$

şeklinde elde edilir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

**Teorem 2.2.4**  $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}$ , kuaterniyonik eğrisi  $s \in I = [0,1]$  yay parametresi ile verilmiş olsun.  $\beta$  eğrisinin  $\beta(s)$  noktasındaki Frenet 4-ayaklısı  $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s)\}$  ve eğrilikleri ise  $\kappa(s), k(s)$  ve  $(r(s) - \kappa(s))$  arasındaki ilişki

$$T'(s) = \kappa(s)N_1(s), \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|, \quad N_1(s) = t(s) \times T(s),$$

$$N_1'(s) = -\kappa(s)T(s) + k(s)N_2(s), \quad N_2(s) = n(s) \times T(s),$$

$$N_2'(s) = -k(s)N_1(s) + (r(s) - \kappa(s))N_3(s), \quad N_3(s) = b(s) \times T(s),$$

$$N_3'(s) = -(r(s) - \kappa(s))N_2(s)$$

şeklindedir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

Frenet formüllerini matris formunda

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & (r-k) \\ 0 & 0 & -(r-k) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

olmak üzere  $\mathcal{V}_s = \mathcal{Q}\mathcal{V}$  şeklinde ifade edilir.

Burada  $\beta(s)$  eğrisi seçilirken eğrinin birim teğet vektörü olan  $T(s)$  vektörü  $t(s) = N_1(s) \times \hat{T}(s)$  bağıntısı ile verildi. Buradan  $\beta(s)$  eğrisinin burulması,  $\alpha(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliğidir. Burada  $\alpha(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin burulması  $r(s)$  ve  $\beta(s)$  kuaterniyonik eğrisinin asli eğriliği  $\kappa(s)$  olmak üzere  $\beta(s)$  kuaterniyonik eğrisinin üçüncü eğriliği  $(r(s) - \kappa(s))$  dir (Bharathi ve Nagaraj, 1985).

### 3. $\mathbb{E}^n$ DE EĞRİLERİN EVOLÜSYONU

$\gamma(u)$ ,  $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve  $\gamma(u)$  eğrisinin  $t$  anındaki yer vektörü  $\gamma(u, t)$  olsun.  $\gamma$  eğrisi için metrik

$$g(u, t) = \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\rangle \quad (3.1)$$

şeklinde verilebilir.  $\gamma(u, t)$  eğrisinin yay uzunluğu ise,

$$L(u, t) = \int_0^u \sqrt{g(\sigma, t)} d\sigma, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\{u, t\}$  eğri üzerindeki koordinat fonksiyonlarıdır.  $\mathbb{E}^n$  de eğrinin akışı (eğri üzerindeki bir noktanın hareketi)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \omega_j V_j \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\omega_j$  ler çatı boyunca hız vektörlerini temsil eder. Bu hız vektörleri sadece  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}\}$  şeklindeki eğriliklere bağlıdır (Yıldız vd., 2013).

**Önerme 3.1**  $g$  metriği için evolüsyon denklemi;

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2g \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1 \omega_2 \right) \quad (3.4)$$

şeklindedir (Yıldız vd., 2013).

**İspat** (3.1) denkleminde  $t$  ye göre , (3.3) denkleminde de  $s$  ye göre türev alır ve  $\frac{\partial}{\partial u}$  ile  $\frac{\partial}{\partial t}$  kısmi türevlerinin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= 2 \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \right\rangle \\ &= 2g \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \right\rangle = 2g \left\langle V_1, \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial s} V_j + \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial V_j}{\partial s} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = 2g \langle V_1, \lambda V_1 + \sum_{j=2}^n A_j V_j \rangle, \\ \lambda = \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1 \omega_2 \right), \\ A_j = \omega_{j,s} + k_{j-1} \omega_{j-1} - k_j \omega_{j+1}, \\ j = 2, 3, \dots, n, k_0 = k_n = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

elde edilir. Yani  $\frac{\partial g}{\partial t} = 2g\lambda$  dir.

**Önerme 3.2**  $\gamma$  eğrisinin yay uzunluğunun evolüsyon denklemi;

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1 \omega_2 \right) \partial \sigma, \quad u \in [0, L]$$

dir (Yıldız vd., 2013).

**İspat.**  $L$  nin  $t$  ye göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g}) \partial \sigma = \int_0^u \frac{g_t}{2\sqrt{g}} \partial \sigma \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.4) denklemi (3.6) denkleminde yerine yazılırsa önerme kanıtlanmış olur.

**Tanım 3.1**  $\gamma$ ,  $\mathbb{E}^n$  de bir eğri ve  $\gamma$  nin yay uzunluğu varyasyonu  $L(u, t)$  olsun.  $\gamma$  nın zamanla bağlantılı hiçbir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} L(u, t) = 0 \text{ yani } g_t = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

olmalıdır (Yıldız vd., 2013)..

**Teorem 3.1**  $\gamma$ ,  $\mathbb{E}^n$  de bir eğri ve  $\gamma$  nın akışı  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$  olsun.  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$  akışının elastik olmaması için gerek ve yeter şart  $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = k_1 \omega_2$  olmasıdır (Yıldız vd., 2013).

**İspat** ( $\Rightarrow$ ) Kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın (3.2) dan yay uzunluğunun değişimi

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \frac{g_t}{2\sqrt{g}} \partial \sigma \quad (3.7)$$

dir. (3.4) denklemini (3.7) denklemine yerine yazılırsa

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial s} - k_1 \omega_2 \right) \partial \sigma$$

elde edilir. Akış elastik olmadığından dolayı  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  dir. Buradan da  $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = k_1 \omega_2$  elde edilir.

( $\Leftrightarrow$ ) Kabul edelim ki  $\frac{\partial \omega_1}{\partial s} = k_1 \omega_2$  olsun. Bu eşitlik (3.4) denkleminde yerine yazılırsa  $g_t = 0$ , yani  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  elde edilir. Buda eğrinin yay uzunluğunun korunduğu anlamına gelir. Böylece eğrinin akışı elastik değildir.

**Teorem.3.2**  $\gamma, \mathbb{E}^n$  de bir eğri ve  $\gamma$  eğrisinin akışı  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \omega_j V_j$  olsun.

i.  $V = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)^T$  Frenet çatısının evolüsyon denklemi

$$V_t = MV \tag{3.8}$$

şeklindedir. Burada  $M$  evolüsyon matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & \cdots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -M_{1n} & -M_{2n} & -M_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{cases} M_{1j} = A_j = \omega_{j,s} + k_{j-1} \omega_{j-1} - k_j \omega_{j+1}, j = 2, 3, \dots, n \\ M_{\alpha\mu} = \frac{1}{k_{\mu-\alpha}} (M_{(\alpha-1)\mu,s} + k_{\mu-1} M_{(\alpha-1)(\mu-1)} - k_{\mu} M_{(\alpha-1)(\mu+1)} + k_{\alpha-2} M_{(\alpha-2)\mu}) \\ \alpha = 2, 3, \dots, n-1, \alpha < \mu \leq n, k_0 = k_n = 0 \end{cases}$$

dir.

ii.  $\gamma$  eğrisinin eğrilikleri için evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} k_{1,t} = M_{12,s} - k_1 \lambda - k_2 M_{13} \\ k_{\alpha,t} = M_{\alpha\mu,s} - k_{\alpha} \lambda - k_{\alpha-1} M_{(\alpha-1)\mu} - k_{\alpha+1} M_{\alpha(\mu+1)} \end{cases}$$

şeklindedir (Abdell-All vd., 2014).

**İspat** (3.3) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınırsa;

$$\gamma_{tu} = \sqrt{g}\gamma_{t,s} = \sqrt{g}(\lambda V_1 + \sum_{j=2}^n A_j V_j) \quad (3.9)$$

elde edilir.

$$\gamma_u = \sqrt{g}\gamma_s = \sqrt{g}V_1$$

eşitliğinin  $t$  ye göre türevi alınırsa

$$\gamma_{u,t} = \sqrt{g}\left(\frac{g_t}{2g}V_1 + V_{1,t}\right) \quad (3.10)$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma_{tu} = \gamma_{ut}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa ve (3.5), (3.9) ve (3.10) denklemleri kullanılırsa

$$V_{1,t} = \sum_{j=2}^n A_j V_j \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.15) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınırsa;

$$V_{1,tu} = \sqrt{g}\left((-k_1 A_2)V_1 + (A_{2,s} - k_2 A_3)V_2 + \sum_{j=3}^n (A_{j,s} + k_{j-1} A_{j-1} - k_j A_{j+1})V_j\right) \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir.

$$V_{1,u} = \sqrt{g}V_{1,s} = \sqrt{g}(k_1 V_2)$$

eşitliğinin  $t$  ye göre türevi alınırsa

$$V_{1,ut} = \sqrt{g}\left(\left(\frac{g_t}{2g}k_1 + k_{1,t}\right)V_2 + k_1 V_{2,t}\right) \quad (3.13)$$

elde edilir.  $V_{1,tu} = V_{1,ut}$  olduğu göz önünde bulundurulur, (3.12) ve (3.13)

denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_{1,t} = A_{2,s} - k_1\lambda - k_2A_3 \\ V_{2,t} = -A_2V_1 + \sum_{j=3}^n B_jV_j \\ B_j = \frac{1}{k_1}(A_{j,s} + k_{j-1}A_{j-1} - k_jA_{j+1}), j = 3, 4, \dots, n \end{cases} \quad (3.14)$$

elde edilir.

$$V_{2,u} = \sqrt{g}V_{2,s} = \sqrt{g}(-k_1V_1 + k_2V_3)$$

olduğundan bu denklemin  $t$  ye göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} V_{2,ut} = \sqrt{g}(-(k_1\lambda + k_{1,t})V_1 - (k_1A_2)V_2 + (-k_1A_3 + k_2\lambda + k_{2,t})V_3 \\ + k_2V_{3,t} - k_1\sum_{j=4}^n A_jV_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

denklemini elde edilir. (3.14) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} V_{2,tu} = \sqrt{g}(-A_{2,s}V_1 - (k_1A_2 + k_2B_3)V_2 + (B_{3,s} - k_3B_4)V_3 \\ + (B_{4,s} - k_3B_3 - k_4B_5)V_4 \\ + \dots + (B_{n-1,s} + k_{n-2}B_{n-2} - k_{n-1}B_n)V_{n-1} + (B_{n,s} - k_{n-1}B_{n-1})V_n) \end{aligned} \quad (3.16)$$

olur.  $V_{2,ut} = V_{2,tu}$  olduğu göz önünde bulundurulur, (3.15) ve (3.16) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_{2,t} = B_{3,s} - k_2\lambda - k_3B_4 + k_1A_3 \\ V_{3,t} = -A_3V_1 - B_3V_2 + \sum_{j=4}^n C_jV_j \\ C_j = \frac{1}{k_2}(B_{j,s} + k_1A_j + k_{j-1}B_{j-1} - k_jB_{j+1}), j = 4, 5, \dots, n \end{cases} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} V_{3,tu} = \sqrt{g}((-A_{3,s} + k_1B_3)V_1 - (B_{3,s} - k_1A_3)V_2 - (k_2B_3 + k_3C_4)V_3 + \\ (C_{4,s} - k_4C_5)V_4 + (C_{5,s} - k_4C_4 - k_5C_6)V_5 + \dots + \\ (C_{n-1,s} + k_{n-2}C_{n-2} - k_{n-1}C_n)V_{n-1} + (C_{n,s} - k_{n-1}C_{n-1})V_n) \end{aligned} \quad (3.18)$$

denklemini elde edilir.

$$V_{3,u} = \sqrt{g}V_{3,s} = \sqrt{g}(-k_2V_2 + k_3V_4)$$

olduğundan bu denklemin  $t$  ye göre türevi alınır

$$V_{3,ut} = \sqrt{g}((k_2A_2)V_1 + (-B_{3,s} + k_3B_4 - k_1A_3)V_2 - (k_2B_3)V_3 + (k_3\lambda + k_{3,t} - k_2B_4)V_4 + k_3V_{4,t} - k_2\sum_{j=5}^n B_jV_j) \quad (3.19)$$

elde edilir.  $V_{3,tu} = V_{3,ut}$  olduğu göz önünde bulundurulur, (3.18) ve (3.19) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_{3,t} = C_{4,s} + k_2B_4 - k_3\lambda + k_4C_5 \\ V_{4,t} = -A_4V_1 - B_4V_2 + C_4V_3 + \sum_{j=5}^n D_jV_j \\ D_j = \frac{1}{k_3}(C_{j,s} + k_2B_j + k_{j-1}C_{j-1} - k_jC_{j+1}), j = 5, 6, \dots, n \end{cases}$$

elde edilir. Benzer şekilde geri kalan Frenet vektörleri için hesaplamalar yapılırsa  $n$ . adım  $V = [V_1, V_2, V_3, \dots, V_n]^T$  ve

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & \dots & A_n \\ -A_2 & 0 & B_3 & B_4 & B_5 & \dots & B_n \\ -A_3 & -B_3 & 0 & C_4 & C_5 & \dots & C_n \\ -A_4 & -B_4 & -C_4 & 0 & D_5 & \dots & D_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_n & -B_n & -C_n & -D_n & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

olmak üzere

$$V_t = MV$$

elde edilir.  $M$  matrisinin bileşenleri

$$\begin{cases} A_j = M_{1j}, & 1 < j \leq n, \\ B_j = M_{2j}, & 2 < j \leq n, \\ C_j = M_{3j}, & 3 < j \leq n, \\ D_j = M_{4j}, & 4 < j \leq n \end{cases}$$

olacak biçimde yeniden düzenlenirse

$$\begin{cases} M_{1j} = A_j = \omega_{j,s} + k_{j-1}\omega_{j-1} - k_j\omega_{j+1}, & j = 2, 3, \dots, n \\ M_{\alpha\mu} = \frac{1}{k_{\mu-\alpha}} (M_{(\alpha-1)\mu,s} + k_{\mu-1}M_{(\alpha-1)(\mu-1)} - k_{\mu}M_{(\alpha-1)(\mu+1)} + k_{\alpha-2}M_{(\alpha-2)(\mu)}), \\ \alpha = 2, 3, \dots, n-1, \quad \mu = 3, \dots, n, \quad \alpha < \mu \\ k_0 = k_n = 0. \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (3.20) denklemi

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & \cdots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -M_{1(n-1)} & -M_{2(n-1)} & -M_{3(n-1)} & \cdots & -M_{(n-1)n} \\ -M_{1n} & -M_{2n} & -M_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Benzer şekilde eğriliklerin evolüsyon denklemleri de

$$\begin{cases} k_{1,t} = M_{12,s} - k_1\lambda - k_2M_{13} \\ k_{\alpha,t} = M_{\alpha\mu,s} - k_{\alpha}\lambda + k_{\alpha-1}M_{(\alpha-1)\mu} - k_{\alpha+1}M_{\alpha(\mu+1)} \end{cases} \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Önerme 3.3**  $\gamma$  eğrisinin  $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$  akışı elastik değil ise eğriliklerin evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} k_{1,t} = M_{12,s} - k_2M_{13} \\ k_{\alpha,t} = M_{\alpha\mu,s} + k_{\alpha-1}M_{(\alpha-1)\mu} - k_{\alpha+1}M_{\alpha(\mu+1)} \end{cases}$$

şeklindedir (Abdell-All vd., 2014).

**İspat**  $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$  akışı elastik değil ise

$$g_t = 0 \text{ yani } \lambda = 0 \quad (3.23)$$

dır. Öyleyse (3.23) denklemini (3.22) denkleminde yerine koyarsak önerme kanıtlanır.

**Teorem 3.3**  $\gamma$ ,  $\mathbb{E}^n$  de bir eğri ve  $\gamma$  nin akışı  $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$  olsun.  $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$  elastik değildir gerek ve yeter şart  $[Q, M]$  Lie çarpımı olmak üzere integrallenebilirlik durumu (sıfır eğrilik durumu)

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0$$

dır (Abdell-All vd., 2014).

**İspat**  $\gamma$ , eğrisinin Frenet çatısı  $V = [V_1, V_2, V_3, \dots, V_n]$  olsun.  $V$  nin  $u$  ya göre türevi

$$V_u = \sqrt{g}V_s = \sqrt{g}QV \quad (3.24)$$

dir. (3.24) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınır ve (3.9) denklemini kullanılırsa

$$V_{ut} = \sqrt{g} \left( \frac{g_t}{2g} Q + Q_t + QM \right) V \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.9) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınır ve (3.24) denklemini kullanılırsa

$$V_{tu} = \sqrt{g}(M_s + MQ)V \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.25) ve (3.26) denklemlerinden

$$V_{ut} - V_{tu} = \sqrt{g} \left( \frac{g_t}{2g} Q + Q_t - M_s + [Q, M] \right) V$$

elde edilir. Şimdi ispatımıza başlayabiliriz.

( $\Rightarrow$ ) Kabul edelim ki akışımız elastik olmasın. O halde  $g_t = 0$  dır.  $u$  ya ve  $t$  ye göre kısmi türevlerin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ )Kabul edelim integrallenebilirlik şartı (sıfır eğrilik şartı) sağlansın, yani

$$Q_t - M_s + [Q, M] = 0 \quad (3.27)$$

olsun. (2.1) ve (3.21) denklemlerinden

$$[Q, M] = \begin{bmatrix} 0 & k_2 M_{13} & M_{13,s} & \cdots & M_{1n,s} \\ -k_2 M_{13} & 0 & -k_1 M_{13} + k_3 M_{24} & \cdots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -M_{1(n-1),s} & -M_{2(n-1),s} & -M_{3(n-1),s} & \cdots & -k_{n-2} M_{n-2n} \\ -M_{1n,s} & -M_{2n,s} & -M_{3n,s} & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

elde edilir. (2.1) denklemini  $t$  ye göre (3.21) denkleminin  $s$  ye göre türevini alıp (3.22) denklemi kullanılırsa

$$M_s - Q_t = \begin{bmatrix} 0 & -k_2 M_{13} + \lambda k_1 & M_{13,s} & \cdots & M_{1n,s} \\ -k_2 M_{13} + \lambda k_1 & 0 & -\lambda k_2 - k_1 M_{13} + k_3 M_{24} & \cdots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -M_{1(n-1),s} & -M_{2(n-1),s} & -M_{3(n-1),s} & \cdots & -\lambda k_{n-1} - k_{n-2} M_{n-2n} \\ -M_{1n,s} & -M_{2n,s} & -M_{3n,s} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

elde edilir. (3.38) ve (3.29) denklemleri (3.27) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda k_1 & 0 & -\lambda k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan  $k_1 = 0, \lambda k_2 = 0, \dots, \lambda k_{n-1} = 0$  elde edilir.  $k_m \neq 0, m = 1, 2, 3, \dots, n$  olduğundan  $\lambda = 0$  dir. Yani  $g = 0$  dir. Eğri akışımız elastik değildir.

**Teorem 3.4**  $n$ -boyutlu Öklid uzayında,  $\gamma(u, t)$  elastik olmayan bir eğri olsun.  $Q$  ve  $M$  matrisleri abelyan ise,  $M$  evölüsyon matrisindeki elemanlar

$$M_{(\alpha-1)\mu} = 0, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n-1 \quad \mu = \alpha + 1$$

dir (Abdel-All vd., 2014).

**İspat**  $Q$  ve  $M$  matrisleri abelyan olduğundan  $[Q, M] = 0$  öyleyse integrallenebilirlik durumu (3.27) için

$$M_s - Q_t = 0 \quad (3.30)$$

olur. Eğri esnek olmayan bir eğri olduğundan  $\lambda = 0$ , yani

$$M_s - Q_t = \begin{bmatrix} 0 & k_2 M_{13} & M_{13,s} & \cdots & M_{1n,s} \\ -k_2 M_{13} & 0 & -k_1 M_{13} + k_3 M_{24} & \cdots & M_{2n,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -M_{1(n-1),s} & -M_{2(n-1),s} & -M_{3(n-1),s} & \cdots & -k_{n-2} M_{n-2n} \\ -M_{1n,s} & -M_{2n,s} & -M_{3n,s} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dır. (3.31) denklemi (3.30) denkleminde  $n = 10$  için yerine yazılırsa;

$$M_{13} = M_{35} = M_{57} = M_{79} = 0, \quad M_{24} = M_{46} = M_{68} = M_{8(10)} = 0$$

olur. Benzer şekilde önceki sonuçlar  $n$ . adıma genişletilirse;

$$M_{(\alpha-1)\mu} = 0, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n-1, \quad \mu = \alpha + 1$$

elde edilir.

#### 4. KUATERNİYONİK EĞRİLERİN EVOLÜSYONU

$\beta(u)$ ,  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik bir eğri ve  $\beta(u)$  kuaterniyonik eğrisinin  $t$  anındaki yer vektörü  $\beta(u, t)$  olsun.  $\beta$  kuaterniyonik eğrisi için metrik

$$v(u, t) = h\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}, \frac{\partial\beta}{\partial u}\right) \quad (4.1)$$

şeklinde verilebilir.  $\beta(u, t)$  eğrisinin yay uzunluğu ise,

$$l(u, t) = \int_0^u \left\| \frac{\partial\beta}{\partial u} \right\| \partial u = \int_0^u \sqrt{v(u, t)} \partial u, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\{u, t\}$  eğri üzerindeki koordinat fonksiyonlarıdır.  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik bir eğrinin akışı (eğri üzerindeki bir noktanın hareketi)

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = f_1 T + f_2 N_1 + f_3 N_2 + f_4 N_3, \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $f_1, f_2, f_3$  ve  $f_4$  kuaterniyonik  $\beta$  eğrimizin skaler hız vektörleridir. Bu hız vektörleri sadece  $\{\kappa, k, r - \kappa\}$  şeklindeki eğriliklere bağlıdır (Körpınar ve Baş, 2016).

**Tanım 4.1**  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik bir eğri  $\beta(u, t)$  olsun.  $\frac{\partial\beta}{\partial t}$  akışı elastik değil ise

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial\beta}{\partial u} \right\| = 0$$

dir (Körpınar ve Baş, 2016).

Elastik olmayan eğri akışı için gerekli ve yeterli şartı söyleyebilmek için aşağıdaki önermeye ihtiyacımız vardır.

**Önerme 4.1**  $v$  metriği için evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2v\eta \quad (4.4)$$

dır. Burada  $\eta = \frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa$  dir (Körpınar ve Baş, 2016).

**İspat** (4.1) denkleminde  $t$  ye göre, (4.3) denkleminde de  $s$  ye göre türev alıp  $\frac{\partial}{\partial u}$  ile  $\frac{\partial}{\partial t}$  kısmi türevlerinin değişmeli olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} h \left( \frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) \\
&= 2h \left( \frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \beta}{\partial u} \right) \right) \\
&= 2h \left( \frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right) \\
&= 2h \left( \frac{\partial \beta}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} (f_1 \cdot T + f_2 \cdot N_1 + f_3 \cdot N_2 + f_4 \cdot N_3) \right) \\
&= 2h \left( \sqrt{v} \frac{\partial \beta}{\partial s}, \sqrt{v} \frac{\partial}{\partial s} (f_1 \cdot T + f_2 \cdot N_1 + f_3 \cdot N_2 + f_4 \cdot N_3) \right) \\
&= 2vh \left( \frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial f_1}{\partial s} T + f_1 \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial s} N_1 + f_2 \frac{\partial N_1}{\partial s} + \frac{\partial f_3}{\partial s} N_2 + f_3 \frac{\partial N_2}{\partial s} + \frac{\partial f_4}{\partial s} N_3 + \right. \\
&\quad \left. f_4 \frac{\partial N_3}{\partial s} \right) \\
&= 2vh \left( \frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial f_1}{\partial s} T + f_1 \cdot (\kappa N_1) + \frac{\partial f_2}{\partial s} N_1 + f_2 \cdot (-\kappa T + \kappa N_2) + \frac{\partial f_3}{\partial s} N_2 \right. \\
&\quad \left. + f_3 (-\kappa N_1 + (r - \kappa) N_3) + \frac{\partial f_4}{\partial s} N_3 + f_4 (-(r - \kappa) N_2) \right) \\
&= 2vh \left( T, \left( \frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa \right) T + \left( f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 k \right) N_1 \right. \\
&\quad \left. + \left( f_2 k + \frac{\partial f_3}{\partial s} - f_4 (r - \kappa) \right) N_2 + \left( f_3 (r - \kappa) + \frac{\partial f_4}{\partial s} \right) N_3 \right) \\
&= 2vh \left( T, \eta T + \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_i N_i \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{cases} \eta = \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa\right) \\ \mathcal{A}_1 = f_1 \kappa + \frac{\partial f_2}{\partial s} - f_3 k \\ \mathcal{A}_2 = f_2 k + \frac{\partial f_3}{\partial s} - f_4 (r - \kappa) \\ \mathcal{A}_3 = f_3 (r - \kappa) + \frac{\partial f_4}{\partial s} \end{cases} \quad (4.5)$$

elde edilir. Yani  $\frac{\partial v}{\partial t} = 2v\eta$  dır.

**Önerme 4.2**  $\beta$  kuaterniyonik eğrisinin yay uzunluğunun evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \sqrt{v} \left( \frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa \right) \partial u, \quad u \in [0, l]$$

dir (Körpınar ve Baş, 2016).

**İspat**  $l$  nin  $t$  ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{v} \partial u = \int_0^u \frac{v_t}{2\sqrt{v}} \partial u \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4) denklemi (4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \sqrt{v} \left( \frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa \right) \partial u$$

elde edilir ve önerme kanıtlanmış olur.

**Tanım 4.2**  $\beta$ ,  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik bir eğri ve  $\beta$  nın yay uzunluğu varyasyonu  $l(u, t)$  olsun.  $\beta$  nın zamanla bağlantılı hiçbir değişime sahip olmaması için

$$\frac{\partial}{\partial t} l(u, t) = 0 \text{ yani } v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

olmalıdır (Körpınar ve Baş, 2016).

**Teorem 4.1**  $\beta$ ,  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik bir eğri ve  $\beta$  nın akışı  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  olsun.  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  akışının elastik olmaması için gerek ve yeter şart  $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$  dır.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ) Kabul edelim ki eğri akışı elastik olmasın, (4.2) den yay uzunluğunun değişimi

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \frac{v_t}{2\sqrt{v}} \partial u \quad (4.7)$$

dur. (4.4) denklemini (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \int_0^u \sqrt{v} \left( \frac{\partial f_1}{\partial s} - f_2 \kappa \right) \partial u$$

elde edilir. Akış elastik olmadığından dolayı  $\frac{\partial l}{\partial t} = 0$  dır. Buradan da  $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$  elde edilir.

( $\Leftarrow$ ) Kabul edelim ki  $\frac{\partial f_1}{\partial s} = f_2 \kappa$  olsun. Bu eşitlik (4.4) denklemin de yerine yazılırsa

$\mathcal{V}_t = 0$  ve  $\frac{\partial l}{\partial t} = 0$  elde edilir. Buda eğrinin yay uzunluğunun korunduğu anlamına gelir. Böylece eğrinin akışı elastik değildir.

**Teorem 4.2**  $\beta$ ,  $\mathbb{E}^4$  de kuaterniyonik bir eğri ve  $\beta$  eğrisinin akışı

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = f_1 T + f_2 N_1 + f_3 N_2 + f_4 N_3$$

olsun.

i.  $\mathcal{V} = [T, N_1, N_2, N_3]^T$  Frenet çatısının evolüsyon denklemini

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{M} \mathcal{V} \quad (4.8)$$

şeklindedir. Burada  $\mathcal{M}$  evolüsyon matrisi

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \\ -\mathcal{A}_1 & 0 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \\ -\mathcal{A}_2 & -\mathcal{B}_2 & 0 & \mathcal{C}_3 \\ -\mathcal{A}_3 & -\mathcal{B}_3 & -\mathcal{C}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i = f_{i+1,s}k_i + k_i f_i - f_{i+2}k_{i+1}; & i = 1,2,3 \\ \mathcal{B}_j = \frac{1}{k_1}(\mathcal{A}_{j,s} + k_j \mathcal{A}_{j-1} - k_{j+1} \mathcal{A}_{j+1}); & j = 2,3 \\ \mathcal{C}_3 = \frac{1}{k_2}(\mathcal{B}_{3,s} + k_1 \mathcal{A}_3 + k_3 \mathcal{B}_2) \\ k_1 = \kappa, \quad k_2 = k, \quad k_3 = (r - \kappa), \quad k_4 = 0 \end{cases}$$

dir.

ii.  $\beta$  eğrisinin eğrilikleri için evölüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = \mathcal{A}_{1,s} - \eta\kappa - k\mathcal{A}_2 \\ k_t = \mathcal{B}_{2,s} - \eta\kappa - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 + \kappa\mathcal{A}_2 \\ (r - \kappa)_t = \mathcal{C}_{3,s} - \eta(r - \kappa) + k\mathcal{B}_3 \end{cases}$$

şeklindedir.

**İspat** (4.3) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınırsa

$$\beta_{tu} = \sqrt{v}\beta_{ts} = \sqrt{v}(\eta T + \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_i N_i) \quad (4.9)$$

elde edilir.  $\beta_u = \sqrt{v}\beta_s = \sqrt{v}T$  eşitliğinin  $t$  ye göre türevi alınırsa

$$\beta_{ut} = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}T + T_t\right) \quad (4.10)$$

elde edilir.  $\beta_{ut} = \beta_{tu}$  olduğu göz önünde bulundurulur ve (4.5), (4.9) ve (4.10) denklemleri kullanılırsa

$$T_t = \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_i N_i \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) in  $u$  ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T_{tu} &= \sqrt{v} \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{A}_1 N_1 + \mathcal{A}_2 N_2 + \mathcal{A}_3 N_3) \\ &= \sqrt{v} (\mathcal{A}_{1,s} N_1 + \mathcal{A}_1 (-\kappa T + k N_2) + \mathcal{A}_{2,s} N_2 + \mathcal{A}_2 (-k N_1 + (r - \kappa) N_3) \\ &\quad + \mathcal{A}_{3,s} N_3 + \mathcal{A}_3 (-(r - \kappa) N_2)) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$T_{tu} = \sqrt{v}((\mathcal{A}_{1,s} - k\mathcal{A}_2)N_1 + (k\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_{2,s} + \mathcal{A}_3(-r - \kappa))N_2 + (-\mathcal{A}_1\kappa)T \\ + (\mathcal{A}_{3,s} + (r - \kappa)\mathcal{A}_2)N_3)$$

denklemini elde edilir.

$$T_u = \sqrt{v}T_s = \sqrt{v}(\kappa N_1)$$

eşitliğinin  $t$  ye göre türevini alınır

$$T_{ut} = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}\kappa + \kappa_t\right)N_1 + \kappa N_{1,t} \quad (4.13)$$

elde edilir.  $T_{tu} = T_{ut}$  olduğu göz önünde bulundurulur ve (4.12) ve (4.13) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} \kappa_t = \mathcal{A}_{1,s} - k\mathcal{A}_2 - \eta\kappa \\ N_{1,t} = -\mathcal{A}_1T + \sum_{j=2}^3 \mathcal{B}_j N_j \\ \mathcal{B}_j = \frac{1}{\kappa}(k_j\mathcal{A}_{j-1} + \mathcal{A}_{j,s} - \mathcal{A}_{j+1}k_{j+1}), j = 2,3 \end{cases} \quad (4.14)$$

elde edilir.

$$N_{1,u} = \sqrt{v}N_{1,s} = \sqrt{v}(-\kappa T + kN_2)$$

eşitliğinin  $t$  ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} N_{1,ut} &= \frac{v_t}{2\sqrt{v}}(-\kappa T - kN_2) + \sqrt{v}(-\kappa T - kN_2)' \\ &= \sqrt{v}\left[\frac{v_t}{2v}(-\kappa T - kN_2) + (-\kappa T - kN_2)'\right] \\ &= \sqrt{v}[\eta(-\kappa T - kN_2) + (-\kappa T - kN_2)'] \\ &= \sqrt{v}[-\kappa\eta T + k\eta N_2 - \kappa_t T - \kappa T_t + k_t N_2 + kN_{2,t}] \\ &= \sqrt{v}[-\kappa\eta T + k\eta N_2 - T(\mathcal{A}_{1,s} - k\mathcal{A}_2 - \eta\kappa)] \\ &= \sqrt{v}[(-\kappa\eta - \kappa_t)T + (-\kappa\mathcal{A}_1)N_1 + (k\eta - \kappa\mathcal{A}_2 + k_t)N_2 + \end{aligned}$$

$$(-\kappa A_3)N_3 + kN_{2,t}] \quad (4.15)$$

(4.14) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınır

$$\begin{aligned} N_{1,tu} &= \sqrt{v}N_{1,ts} = \sqrt{v} \frac{\partial}{\partial S} (-\mathcal{A}_1 T + \mathcal{B}_2 N_2 + \mathcal{B}_3 N_3) \\ &= \sqrt{v}(-\mathcal{A}_{1,s} T) - \mathcal{A}_1 \kappa N_1 + \mathcal{B}_{2,s} N_2 + \mathcal{B}_2(-kN_1 + (r - \kappa)N_3 + \mathcal{B}_{3,s} N_3 \\ &\quad + \mathcal{B}_3(-(r - \kappa)N_2)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} N_{1,tu} &= \sqrt{v}(T(-\mathcal{A}_{1,s}) - N_1(\kappa \mathcal{A}_1 + k\mathcal{B}_2) + N_2(\mathcal{B}_{2,s} - (r - \kappa)\mathcal{B}_3) \\ &\quad + N_3(\mathcal{B}_2(r - \kappa) + \mathcal{B}_{3,s})) \end{aligned}$$

denklemi elde edilir.  $N_{1,tu} = N_{1,ut}$  olduğu göz önünde bulundurulur ve (4.15) ve (4.16) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} k_t = \mathcal{B}_{2,s} - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 - k\eta + \kappa \mathcal{A}_2 \\ N_{2,t} = -\mathcal{A}_2 T - \mathcal{B}_2 N_1 + \mathcal{C}_3 N_3 \\ \mathcal{C}_3 = \frac{1}{k}(\kappa \mathcal{A}_3 + (r - \kappa)\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_{3,s}) \end{cases} \quad (4.17)$$

elde edilir.

$$N_{2,ut} = \sqrt{v}N_{2,ts} = \sqrt{v}(-kN_1 + (r - \kappa)N_3)$$

eşitliğinin  $t$  ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} N_{2,ut} &= \sqrt{v} \left[ \frac{v_t}{2v} (-kN_1 + (r - \kappa)N_3) + (-kN_1 + (r - \kappa)N_3)' \right] \\ N_{2,ut} &= \sqrt{v} \left[ \frac{v_t}{2v} (-kN_1 + (r - \kappa)N_3) \right. \\ &\quad \left. + (-k_t N_1 - kN_{1,t} + (r - \kappa)_t N_3 + (r - \kappa)N_{3,t}) \right] \\ &= \sqrt{v} \left[ \eta(-kN_1 + (r - \kappa)N_3) + (-N_1(\mathcal{B}_{2,s} - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 - k\eta + \kappa \mathcal{A}_2) \right. \\ &\quad \left. - k(-\mathcal{A}_1 T + \mathcal{B}_2 N_2 + \mathcal{B}_3 N_3) + (r - \kappa)_t N_3 + (r - \kappa)N_{3,t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{2,ut} &= \sqrt{v} [T(k\mathcal{A}_1) + N_1(-\mathcal{B}_{2,s} + (r - \kappa)\mathcal{B}_3 - \kappa\mathcal{A}_2) + N_2(-k\mathcal{B}_2) \\
&\quad + (\eta(r - \kappa) - k\mathcal{B}_3 + (r - \kappa)_t) + (r - \kappa)N_{3,t}] \tag{4.18}
\end{aligned}$$

(4.17) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
N_{2,tu} &= \sqrt{v} N_{2,ts} = \sqrt{v} \frac{\partial}{\partial s} (-\mathcal{A}_2 T - \mathcal{B}_2 N_1 + \mathcal{C}_3 N_3) \\
&= \sqrt{v} (-\mathcal{A}_{2,s} T - \mathcal{A}_2 (\kappa N_1) - \mathcal{B}_{2,s} N_1 - \mathcal{B}_2 (-\kappa T + k N_2) + \mathcal{C}_{3,s} N_3 \\
&\quad + \mathcal{C}_3 (-(r - \kappa) N_2)) \tag{4.19} \\
&= \sqrt{v} ((-\mathcal{A}_{2,s} + \mathcal{B}_2 \kappa) T - (\mathcal{A}_2 \kappa + \mathcal{B}_{2,s}) N_1 + (-\mathcal{B}_2 k - \mathcal{C}_3 (r - \kappa)) N_2) \\
&\quad + \mathcal{C}_{3,s} N_3)
\end{aligned}$$

elde edilir.  $N_{2,ut} = N_{2,tu}$  olduğu göz önünde bulundurulur (4.18) ve (4.19) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{cases} (r - \kappa)_t = \mathcal{C}_{3,s} + k\mathcal{B}_3 - \eta(r - \kappa) \\ N_{3,t} = -\mathcal{A}_3 T - \mathcal{B}_3 N_1 - \mathcal{C}_3 N_2 \end{cases}$$

elde edilir. Elde edilen denklemler matris formunda,

$$\mathcal{V} = [T, N_1, N_2, N_3]^T \text{ ve}$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \\ -\mathcal{A}_1 & 0 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \\ -\mathcal{A}_2 & -\mathcal{B}_2 & 0 & \mathcal{C}_3 \\ -\mathcal{A}_3 & -\mathcal{B}_3 & -\mathcal{C}_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

olmak üzere

$$\mathcal{V}_t = \mathcal{M}\mathcal{V}$$

elde edilir.  $\mathcal{M}$  matrisinin bileşenleri açık olarak

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i = f_{i+1,s}k_i + k_i f_i - f_{i+2}k_{i+1}; & i = 1,2,3 \\ \mathcal{B}_j = \frac{1}{k_1}(\mathcal{A}_{j,s} + k_j \mathcal{A}_{j-1} - k_{j+1} \mathcal{A}_{j+1}); & j = 2,3 \\ \mathcal{C}_3 = \frac{1}{k_2}(\mathcal{B}_{3,s} + k_1 \mathcal{A}_3 + k_3 \mathcal{B}_2) \\ k_1 = \kappa, \quad k_2 = k, \quad k_3 = (r - \kappa), \quad k_4 = 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Eğriliklerin evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = \mathcal{A}_{1,s} - k\mathcal{A}_2 - \eta\kappa \\ k_t = \mathcal{B}_{2,s} - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 - \eta k + \kappa\mathcal{A}_2 \\ (r - \kappa)_t = \mathcal{C}_{3,s} + k\mathcal{B}_3 - \eta(r - \kappa) \end{cases} \quad (4.21)$$

şeklinde elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Sonuç 4.1**  $\beta$  eğrisinin  $\frac{\partial\beta}{\partial t}$  akışı elastik değil ise evolüsyon denklemleri

$$\begin{cases} \kappa_t = \mathcal{A}_{1,s} - k\mathcal{A}_2 \\ k_t = \mathcal{B}_{2,s} - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 + \kappa\mathcal{A}_2 \\ (r - \kappa)_t = \mathcal{C}_{3,s} + k\mathcal{B}_3 \end{cases}$$

şeklindedir.

**İspat**  $\frac{\partial\beta}{\partial t}$  eğri akışı elastik değil ise

$$v_t = 0 \text{ yani } \eta = 0 \quad (4.22)$$

dır. Öyleyse (4.22) denklemini (4.21) denkleminde yerine yazılırsa önerme kanıtlanır.

**Teorem 4.3**  $\beta$ ,  $\mathbb{E}^4$  de bir eğri ve  $\beta$  nın akışı  $\frac{\partial\beta}{\partial t}$  olsun.  $\frac{\partial\beta}{\partial t}$  eğrisinin akışı elastik değildir gerek ve yeter şart  $[Q, \mathcal{M}]$  Lie çarpımı olmak üzere integrallenebilirlik durumu (sıfır eğrilik durumu)

$$Q_t - \mathcal{M}_s + [Q, \mathcal{M}] = 0$$

dır.

**İspat**  $\beta$  eğrisinin Frenet çatısı  $\mathcal{V} = (T, N_1, N_2, N_3)$  olsun.  $\mathcal{V}$  nin  $u$  ya göre türevi

$$\mathcal{V}_u = \sqrt{v}\mathcal{V}_s = \sqrt{v}Q\mathcal{V} \quad (4.23)$$

dir. (4.23) denkleminin  $t$  ye göre türevi alınır ve (4.8) denklemini kullanılırsa

$$\mathcal{V}_{ut} = \frac{v_t}{2\sqrt{v}}Q\mathcal{V} + \sqrt{v}(Q_t\mathcal{V} + Q\mathcal{V}_t) = \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}Q + Q_t + Q\mathcal{M}\right)\mathcal{V} \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.8) denkleminin  $u$  ya göre türevi alınır ve (4.23) denklemini kullanılırsa

$$\mathcal{V}_{tu} = \sqrt{v}\mathcal{V}_{ts} = \sqrt{v}(\mathcal{M}_s\mathcal{V} + \mathcal{M}Q\mathcal{V}) = \sqrt{v}(\mathcal{M}_s + \mathcal{M}Q)\mathcal{V} \quad (4.25)$$

(4.24) ve (4.25) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ut} - \mathcal{V}_{tu} &= \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}Q + Q_t + Q\mathcal{M} - \mathcal{M}_s - \mathcal{M}Q\right)\mathcal{V} \\ &= \sqrt{v}\left(\frac{v_t}{2v}Q + Q_t - \mathcal{M}_s + [Q, \mathcal{M}]\right)\mathcal{V} \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. Şimdi ispat işlemine başlanırsa,

( $\Rightarrow$ ) Kabul edelim ki akışımız elastik olmasın. O halde  $\mathcal{V}_t = 0$  dir.  $\frac{\partial}{\partial u}$  ile  $\frac{\partial}{\partial t}$  kısmi türevlerinin değişmeli olduğu göz önünde kullanılırsa

$$Q_t - \mathcal{M}_s + [Q, \mathcal{M}] = 0$$

elde edilir.

( $\Leftarrow$ ) Kabul edelim ki integrallenebilirlik şartı (sıfır eğrilik şartı) sağlansın. Yani

$$Q_t - \mathcal{M}_s + [Q, \mathcal{M}] = 0 \quad (4.27)$$

olsun. (2.3) ve (4.20) denklemlerinden

$$[Q, \mathcal{M}] = \begin{bmatrix} 0 & k\mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_{2,s} & \mathcal{A}_{3,s} \\ -k\mathcal{A}_2 & 0 & -\kappa\mathcal{A}_2 + (r - \kappa)\mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_{3,s} \\ -\mathcal{A}_{2,s} & \kappa\mathcal{A}_2 - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 & 0 & k\mathcal{B}_3 \\ -\mathcal{A}_{3,s} & -\mathcal{B}_{3,s} & -k\mathcal{B}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$Q$  nun  $t$  ye göre  $\mathcal{M}$  nin de  $s$  ye göre türevi alınıp (4.21) kullanılırsa,

$$Q_t - \mathcal{M}_s = \begin{bmatrix} 0 & -\eta\kappa - k\mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_{2,s} & -\mathcal{A}_{3,s} \\ \eta\kappa + k\mathcal{A}_2 & 0 & -\eta\kappa + \kappa\mathcal{A}_2 - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 & -\mathcal{B}_{3,s} \\ \mathcal{A}_{2,s} & \eta\kappa - \kappa\mathcal{A}_2 + (r - \kappa)\mathcal{B}_3 & 0 & -\eta(r - \kappa) + k\mathcal{B}_3 \\ \mathcal{A}_{3,s} & \mathcal{B}_{3,s} & \eta(r - \kappa) - k\mathcal{B}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

(4.28) ve (4.29) denklemleri (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\eta\kappa & 0 & 0 \\ \eta\kappa & 0 & -\eta\kappa & 0 \\ 0 & \eta\kappa & 0 & -\eta(r - \kappa) \\ 0 & 0 & \eta(r - \kappa) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. Son denklemden  $\eta = 0$  için  $\mathcal{V} = \text{sabit}$  olduğu görülür. Yani akış elastik değildir.

**Sonuç 4.1** 4-boyutlu Öklid uzayında,  $\beta(u, t)$  esnek olmayan kuaterniyonik bir eğri olsun.  $Q$  ve  $\mathcal{M}$  matrisleri abelyan ise  $Q$  evolüsyon matrisinin  $A_2$  ve  $B_3$  bileşenleri

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_3 = 0$$

dır.

**İspat**  $Q$  ve  $\mathcal{M}$  matrisleri abelyan olduğundan  $[Q, \mathcal{M}] = 0$  öyleyse integrallenebilirlik durumu (4.27) için aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{M}_s - Q_t = 0 \quad (4.30)$$

Eğri esnek olmayan bir eğri olduğundan  $\eta = 0$ , yani

$$\mathcal{M}_s - Q_t = \begin{bmatrix} 0 & -k\mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_{2,s} & -\mathcal{A}_{3,s} \\ k\mathcal{A}_2 & 0 & -\kappa\mathcal{A}_2 + (r - \kappa)\mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_{3,s} \\ -\mathcal{A}_{2,s} & \kappa\mathcal{A}_2 - (r - \kappa)\mathcal{B}_3 & 0 & k\mathcal{B}_3 \\ -\mathcal{A}_{3,s} & -\mathcal{B}_{3,s} & -k\mathcal{B}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

dir. (4.30) ve (4.31) eşitliklerinden

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_3 = 0$$

dır.

**Örnek 4.1**  $\beta(s) = \left( \cos \sqrt{\frac{2}{3}}s, \sin \sqrt{\frac{2}{3}}s, \cos \sqrt{\frac{1}{3}}s, \sin \sqrt{\frac{1}{3}}s \right)$  kuarterniyonik eğrisini göz önüne alalım.  $\beta(s)$  nın eğrilikleri

$$\kappa = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, \quad (r - \kappa) = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

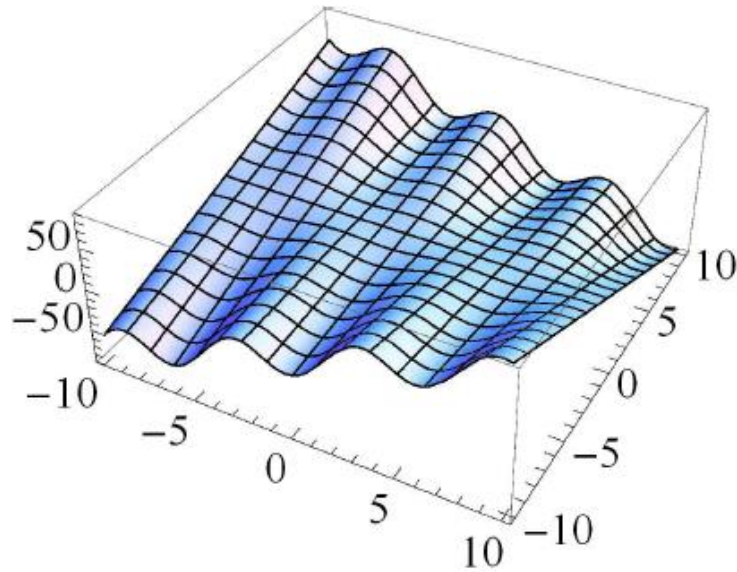
dir. Eğer skaler hız fonksiyonları

$$f_1 = s^2 \cos(s^2), \quad f_2 = s \sin(s), \quad f_3 = s^2, \quad f_4 = s$$

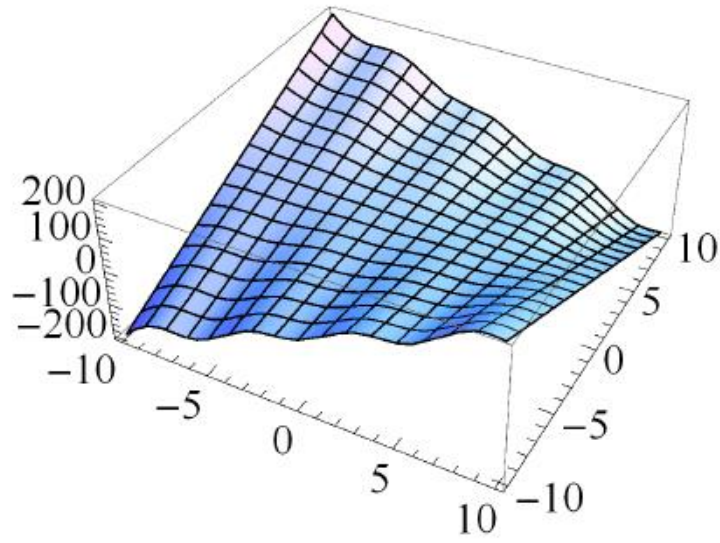
şeklinde alınırsa eğriliklerin evolüsyon denklemlerinin,

$$D = \begin{cases} -10 < u < 10 \\ -10 < t < 10 \end{cases}$$

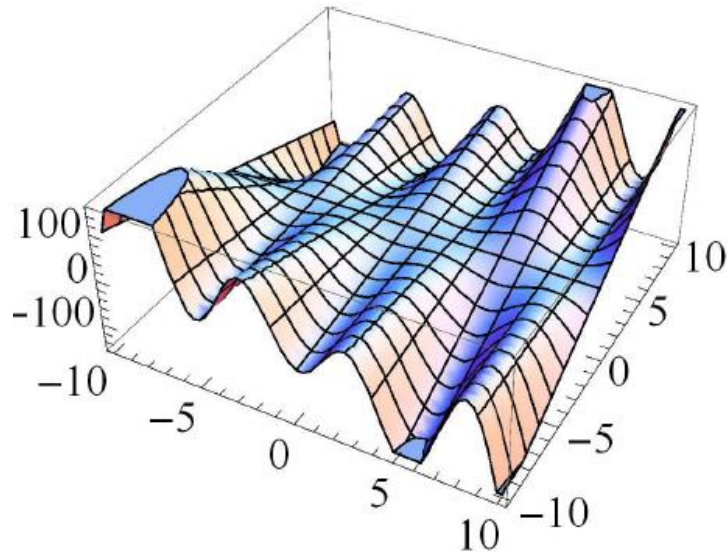
için grafikleri sırasıyla Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 deki gibidir.



**Şekil 4.1**  $\kappa$  nın evolüsyonu.



Şekil 4.2  $k$  nın evolüsyonu.



Şekil 4.3  $(r - \kappa)$  nın evolüsyonu.

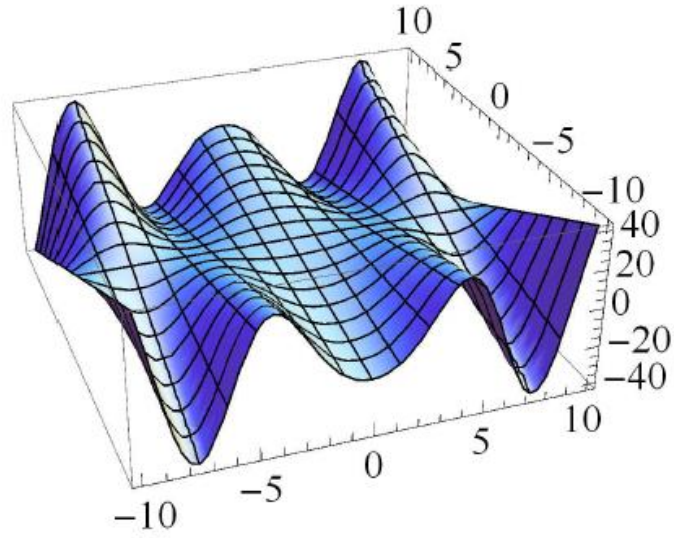
Eğer

$$f_1 = \cos(s), f_2 = s \sin(s), f_3 = s \cos(s), f_4 = s \sin(s)$$

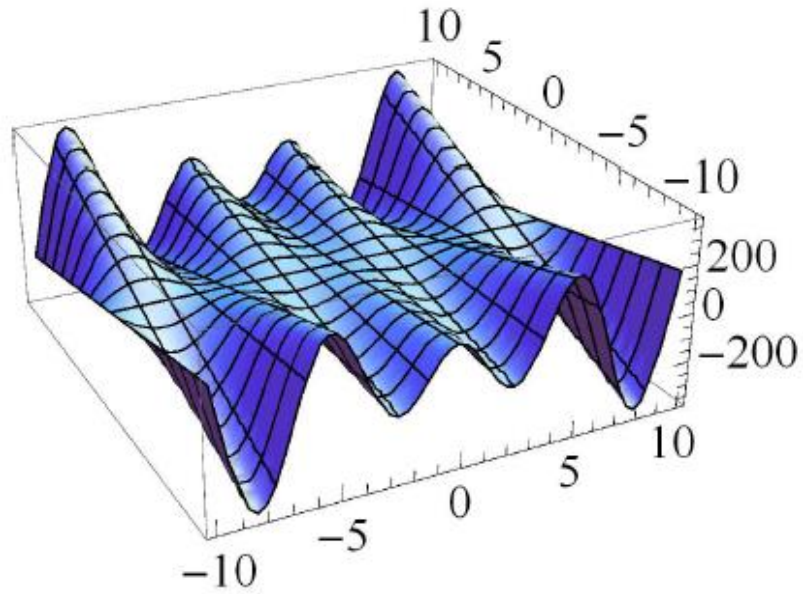
şeklinde seçilirse eğriliklerin evolüsyon denklemlerinin,

$$D = \begin{cases} -5 < u < 5 \\ -5 < t < 5 \end{cases}$$

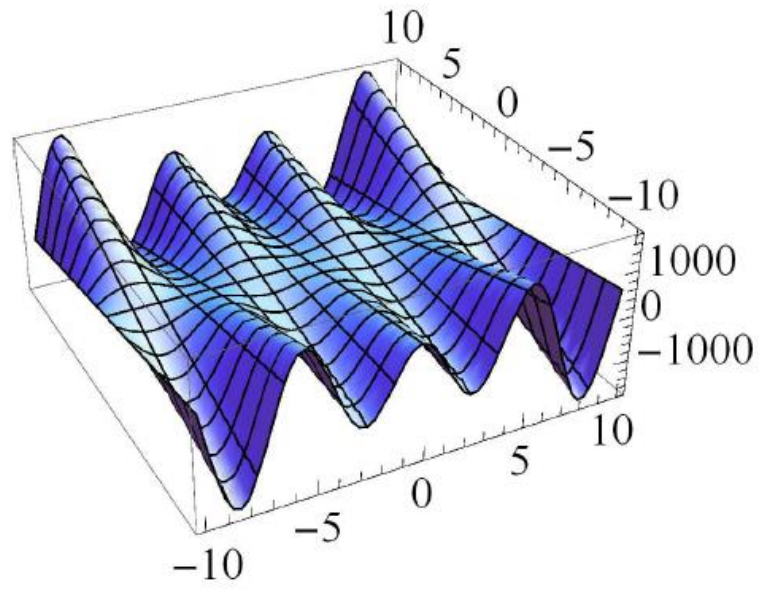
İçin grafikleri sırasıyla Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 deki gibidir.



Şekil 4.4  $\kappa$  nın evölüsyonu.



Şekil 4.5  $k$  nın evölüsyonu.



Şekil 4.6  $(r - \kappa)$  nin evolüsyonu.

## KAYNAKLAR

- Abdel-All, N. H., Mohamed, S. G., & Al-Dossary, M. T. (2014). Evolution of generalized space curve as a function of its local geometry. *Applied Mathematics*, 5(15), 2381.
- Bharathi, K., & Nagaraj, M. (1985). Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae.. *Indian J. Pure Appl. Math*, 16: 741-756.
- Chirikjian, G.S. & Burdick, J.W. (1990). Kinematics of Hyper-Redundant Manipulators. *Proceeding of the ASME Mechanisms Conference*, Chicago, 391-396.
- Çöken, A. C. & Tuna, A. (2004). On the Quaternionic Inclined Curves in the Semi-Euclidean Space  $E_2^4$ . *Appl. Math. Comput*, 155, 373-389.
- Desbrun, M., & Cani, M. P. (1998). Active implicit surface for animation. *Proceedings of the Graphics Interface Conference*, Vancouver.
- Gage, M. E. (1984). Curve shortening makes convex curves circular. *Inventiones mathematicae*, 76(2), 357-364.
- Gage, M. On an area-preserving evolution equation for plane curves. *Nonlinear Problems in Geometry* (Mobile, Ala., 1985), 51–62. *Contemp. Math*, 51.
- Gage, M., & Hamilton, R. S. (1986). The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, 23(1), 69-96.
- Grayson, M. A. (1987). The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *Journal of Differential geometry*, 26(2), 285-314.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983) *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 335.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). *Diferansiyel Geometri I*. Ankara Üniversitesi, Ankara, 270.
- Hamilton, W. R. (1899). *Elements of Quaternions*. Chelsea, New York, 568.
- Kass, M., Witkin, A., & Terzopoulos, D. (1988). Snakes: Active contour models. *International journal of computer vision*, 1(4), 321-331.
- Körpınar, T., & Bas, S. (2016). Characterization of Quaternionic Curves by Inextensible Flows. *Prespacetime Journal*, 7(12), 1680-1684.
- Kwon, D., Park, F. C., & Chi, D. P. (2005). Inextensible flows of curves and developable surface. *Applied Mathematics Letters*. 18(10), 1156-1162.
- Kwon, D. Y., & Park, F. C. (1999). Evolution of inelastic plane curves. *Applied Mathematic Letters*, 12(6), 115-119.

Lu, H. Q., Todhunter, J. S., & Sze, T. W. (1993). Congruence conditions for nonplanar developable surfaces and their application to surface recognition. *CVGIP: Image Understanding*, 58(3), 265-285.

### KAYNAKLAR (Devam Ediyor)

- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 468.
- Okuyucu, O. Z. (2013). Characterizations of the Quaternionic Mannheim Curves in Euclidean space. *International J. Math. Combin*, 2, 44-53.
- Özdemir, M., & Ergin, A.A. (2006) Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 56, 322–336.
- Ratcliffe, J. (1994) *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 793.
- Sabuncuoğlu, A. (2017). Diferansiyel Geometri. Nobel Yayınları, Ankara, 522.
- Tandoğan, F. (2009). *Minkowski uzayında eğriler ve elastik olmayan hareketler*. Y. Lisans Tezi, Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Tuna, A. (2002). *Yarı öklid uzaylarda kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri*. Y. Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, Turkey.
- Walrave, J. (1995). *Curves and surfaces in Minkowski space*. Doctoral thesis, Leuven, K.U. Faculty of Science, Leuven.
- Ward, J. P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers*. Kluwer Academic Publishers, Boston-London.
- Yıldız, A. F., Okuyucu, O. Z., & Yıldız, Ö. G., (2017). Inextensible flow of a semi-real quaternionic curve in semi-euclidean space  $\mathbb{R}^4_2$ . *Communications series a1 mathematics & statistics*, 67(1), 341-350.
- Yıldız, Ö.G., & Anıgören, Ö. (2017) On the Evolution of Quaternionic Curves in Euclidean 4-space. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017)*, Şanlıurfa, Türkiye, 778-779.
- Yıldız, Ö.G., & Karakuş, Ö. S. (2016). On the Quaternionic Normal Curves in the Semi-Euclidean Space  $E_2^4$ . *International J.Math. Combin*, 3, 68-76.
- Yıldız, Ö.G., Karakuş, Ö.S., & Tosun, M. (2013). *A note on inextensibl flows of curves in  $E^n$* . *International Electronic Journal of Geometry*, 118-124
- Yüce, S. (2017). *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi, İstanbul, Türkiye, 557.
- Yıldız, Ö.G., & İçer, Ö. (2019), Evolution of the curve in 4-dimensional Euclidean space on quaternionic. *14. Ankara Mathematics Days*, Ankara Türkiye.

## ÖZ GEÇMİŞ



### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Özlem İÇER  
Doğum Yeri ve Tarihi : BİLECİK 04.04.1991

### Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Pamukkale Üniversitesi-MATEMATİK-2013

### Sertifikalar

: Kastamonu Üniversitesi-Pedagojik Formasyon-2014

### İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Özel Bilecik Sınav Temel Lisesi  
: Özel Manisa Birey Temel Lisesi  
: YEGEM-Manisa

### İletişim

Adres : Muradiye Mah. Cumhuriyet Cad. No:24/2 Kat:2 Daire:1  
Muradiye/MANİSA

E-Posta Adresi : [ozlem.anigoren@gmail.com](mailto:ozlem.anigoren@gmail.com)

### Akademik Çalışmalar

- On the Evolution of Quaternionic Curves in Euclidean 4-space. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) YILDIZ ÖNDER GÖKMEN, ANİGÖREN ÖZLEM
- Evolution of the curve in 4-dimensional Euclidean space on quaternionic. 14. Ankara Matematik Günleri (2019 AMG) YILDIZ ÖNDER GÖKMEN,İÇER ÖZLEM

**Tarih:** 05/08/2019