

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZÜBEYDE ÖNEŞ

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ BENGİ YILDIZ

BİLECİK, 2023

10514385

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZÜBEYDE ÖNEŞ

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ BENGİ YILDIZ

BİLECİK, 2023

10514385

## BEYAN

"Kesirli Mertebeden Sistemlerin Kararlılık Analizi" adlı yüksek lisansta yeterlik tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım ve-rilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması duru- munda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.	
<b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>	<b>DESTEK ALINMAMIŞTIR   X</b>
<b>Destek alındı ise;</b>	
<b>Destekleyen kurum;</b>	
<b>Desteğin Türü</b>	<b>Proje Numarası</b>
<b>1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</b>	
<b>2-TÜBİTAK</b>	
<b>Diğer;</b>	
<b>ETİK KURUL onayı var ise;</b>	
<b>ETİK KURUL karar tarih/sayı:</b>	...../.....

**Zübeyde ÖNEŞ**

**Tarih**

.....

**İmza**

.....

## ÖN SÖZ

Bu tez yeterlik çalışmasının yazılmasında, çalışmamı sahiplenerek takip eden danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bengi YILDIZ'a değerli katkı ve emekleri için teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu günlere ulaşmamdaki emekleri adına değerli aileme teşekkür ederim.

**Zübeyde ÖNEŞ**

**2023**

## ÖZET

### KESİRLİ MERTEBEDEN SİSTEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ

Bu tez çalışmasında kesirli operatör tanımları ve özellikleri de dahil olmak üzere kesirli hesaplamalar için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir. Klasik dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan bazı yöntemler tanımlanarak bunlara benzer şekilde kesirli mertebeden dinamik sistemlerin kararlılık analizi incelenmiştir. Ardından kesirli mertebeden sistemlerin kararlılık analizine bir uygulama olarak Türkiye’de Covid-19 yayılımının davranışının anlaşılması için duyarlı, maruz kalan, enfekte, iyileşmiş ve ölen bireylerin oluşturduğu bir kesirli SEIRD dinamik modeli önerilmiştir. Önerilen modelin kararlılığı incelenmiş ve sayısal simülasyonları elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli Türev, Kesirli Sistem, Kararlılık, SEIRD Model.

## ABSTRACT

### STABILITY ANALYSIS OF FRACTIONAL ORDER SYSTEMS

In this thesis, necessary definitions and theorems for fractional calculations, including fractional operator definitions and properties are given. Some methods used in the stability analysis of classical dynamical systems are introduced and similarly, stability analysis of fractional order dynamic systems is examined. Then, as an application to the stability analysis of fractional order systems, a fractional SEIRD dynamic model consisting of susceptible, exposed, infected, recovered and deceased individuals is proposed to understand the behavior of Covid-19 spread in Turkey. The stability of the proposed model is examined and numerical simulations are obtained.

**Keywords:** Fractional Derivative, Fractional System, Stability, SEIRD Model.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖN SÖZ .....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	vii
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Kesirli Türev ve İntegral Tanımları .....	3
2.2. Dinamik Sistemlerin Kararlılığı İle İlgili Tanım ve Teoremler .....	7
3. KARARLILIK ANALİZİ VE İLGİLİ YÖNTEMLER .....	15
3.1. Klasik Sistemlerin Kararlılık Analizi.....	15
3.2. Kesirli Mertebeden Sistemlerin Kararlılık Analizi.....	19
3.2.1. Riemann-Liouville Türevini İçeren Kesirli Mertebeden Sistemler .....	19
3.2.2. Caputo Türevini İçeren Kesirli Mertebeden Sistemler .....	24
3.3. Yeni Nesil Matris Yöntemi .....	28
4. KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVİN BİR UYGULAMASI .....	38
4.1. Matematiksel Modelin Oluşturulması.....	38
4.2. Denge Noktası ve Kararlılık Analizi .....	41
4.3. Denge Noktalarının Kararlılığı .....	44
4.4. Hastalısız Dengenin Global Kararlılığı.....	49
4.5. Sayısal Simülasyonlar.....	51

<b>5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....</b>	<b>58</b>
<b>KAYNAKÇA.....</b>	<b>59</b>



## TABLÖLÄR LİSTESİ

Sayfa

**Tablo 4.1.** Sistem (4.3)'ün Türkiye'deki vaka sayıları kullanılarak tahmini parametreleri . **55**

## ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1. Önerilen SEIRD modelinin şematik diyagramı .....	39
Şekil 4.2. 11 Mart - 31 Mart 2020 arasında rapor edilen nCovid-19 vakaları .....	52
Şekil 4.3. 26 Mart - 9 Nisan 2020 arasında rapor edilen nCovid-19 vakaları.....	52
Şekil 4.4. 10 Nisan - 24 Nisan 2020 arasında rapor edilen nCovid-19 vakaları.....	53
Şekil 4.5. 25 Nisan - 9 Mayıs 2020 arasında rapor edilen nCovid-19 vakaları .....	53
Şekil 4.6. 10 Mayıs - 24 Mayıs 2020 arasında rapor edilen nCovid-19 vakaları.....	54
Şekil 4.7. 25 Mayıs - 5 Haziran 2020 arasında rapor edilen nCovid-19 vakaları .....	54
Şekil 4.8. [1,20] - [16,30] arasındaki günler için sistem (4.3)'ün dinamik davranışı .....	56
Şekil 4.9. [31,45] - [46,60] arasındaki günler için sistem (4.3)'ün dinamik davranışı.....	56
Şekil 4.10. [61,87] - [66,87] arasındaki günler için sistem (4.3)'ün dinamik davranışı .....	57

## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\top$	: Transpoz
$\mathbf{I}_n$	: $n \times n$ boyutlu birim matris
$\Gamma$	: Gama fonksiyonu
${}^{\text{RL}}\mathbf{D}_{a,t}^{\nu}$	: Riemann-Liouville kesirli mertebe türev operatörü
${}^{\text{C}}\mathbf{D}_{a,t}^{\nu}$	: Caputo kesirli mertebe türev operatörü
$\mathbf{E}_{\alpha,\beta}$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathbf{N}$	: Toplam nüfus
$\mathbf{S}$	: Duyarlı birey
$\mathbf{E}$	: Maruz kalan birey
$\mathbf{I}$	: Enfekte olan birey
$\mathbf{R}$	: İyileşen birey
$\mathbf{D}$	: Ölen birey
$\mathbf{R}_0$	: Temel üreme sayısı
$\partial$	: Kısmi türev

## 1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden sistemler, tam olmayan (keyfi) mertebeden türevleri içeren kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile modellenebilen sistemlerdir. Fizik, biyoloji, termodinamik, viskoelastisite, elektrokimya gibi birçok alandaki dinamik sistemlerin davranışlarının incelenmesinde kesirli mertebeden sistemler önemli katkı sağlamaktadır. Bunun sebebi kesirli mertebeden türevin söz konusu uygulama alanlarında gerçek verilere daha iyi uyum sağlaması ve klasik tamsayı mertebeden türevlerin kısıtlamalarının üstesinden gelmesidir.

Klasik analizin kesirli analize genişletilmesi yeni değildir. İlk olarak L'Hospital ile Leibniz'in mektuplar aracılığıyla yaptığı ilmi sohbetlerden birinde ortaya çıkmıştır ( Liouville, 1834; Abel, 1881). İki bilim insanı arasındaki bu mektuplaşmalardan biri olan 30 Eylül 1695 tarihli mektup konuya yeni bir açılım getirmiş ve bu sayede fark edilen problem sorgulanırken kesirli teori ortaya çıkmıştır. Sonrasında bu araştırmaya pek çok çalışma eklenmiştir ( Euler, 1730; Fourier, 1820).

Birçok yazar kesirli mertebeden sistemlerin kararlılığına odaklanmıştır. Diethelm ve arkadaşlarının "Analysis of Fractional Differential Equations" adlı makalelerinde (Diethelm, 2002) kesirli mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve yapısal kararlılığı ele alınmıştır. Kesirli diferansiyel denklemin çözümünün ve başlangıç koşuluna bağımlılığı araştırılıp elde edilen sonuçlar kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için uygun sayısal şemaların seçimiyle ilişkilendirilmiştir. "Stability of Fractional-Order Systems with Rational Orders" (Petras, 2008) adlı makale, kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan sistemlerin belirli sınıflarının kararlılığı ile ilgilidir. Makalede kararlılık, zaman ve frekans alanında araştırılmıştır. Ayrıca genel kararlılık koşulları çeşitli açıklayıcı örnekler ile birlikte sunulmuştur. Kesirli mertebeden lineer olmayan dinamik sistemlerin kararlılığı, doğrudan Lyapunov yöntemi kullanılarak Mittag Leffler kararlılığı ve genelleştirilmiş Mittag Leffler kararlılık kavramlarının tanıtılması ile Li ve arkadaşlarının "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability" adlı makalesinde (Li, 2010) incelenmiştir. Sebatier ve arkadaşlarının "LMI stability conditions for fractional order systems" adlı makalelerinde (Sabatier, 2010), kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemler ile tanımlanan sistemlerin kararlılık analizine ait sonuçlara genel bir bakış sunarak kesirli mertebeden sistemler için Doğrusal Matris Eşitsizliği (LMI) kararlılık koşullarını ele almaktadır. "Stability Analysis of Swine Flu Transmission - A Mathematical Approach"

makalesinde (Das, 2014) bir Domuz Gribi Bulaşma Modeli'nin analizine yer verilmiştir. Modelin lokal ve global kararlılığı, hastalık endemik olmasına rağmen, temas oranını kontrol etmek için yeterince dikkat edilirse hastalığın hala kontrol altında olduğunu göstermektedir. Makalede analitik sonuçları doğrulamak için sayısal simülasyonlar da uygulanmıştır. "Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative" adlı makalede (Qian, 2010) Riemann-Liouville türevi ile kesirli mertebeye diferansiyel sistem için kararlılık teoremleri oluşturulmuştur. Bu çalışma özellikle lineer sistemin, pertübe sistemin ve zaman gecikmeli sistemin analizini kapsamaktadır.

Kesirli mertebeden sistemlerin çözüm yöntemlerine ilişkin çalışmalar literatürde yer almaktadır. Bunlardan biri olan "On the numerical solutions of some fractional ordinary differential equations by fractional Adams-Bashforth-Moulton method" adlı makalede (Baskonus, 2015), bazı lineer ve lineer olmayan kesirli adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Adams-Bashforth-Moulton yöntemi uygulanmıştır. Ardından her iki kesirli diferansiyel denklem için sayısal sonuçları içeren tablo oluşturulmuştur. Parametrelerin uygun değerleri dikkate alınarak sayısal denklemlerin çözümleri ve analitik çözümlerin iki boyutlu yüzeyleri çizilmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, kesirli mertebeden türev ve integral operatörleri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, öncelikle klasik dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan bazı yöntemler tanımlanarak bunlara benzer şekilde kesirli mertebeden dinamik sistemlerin kararlılık analizi incelenmiştir. Kesirli mertebeden sistemleri tanımlayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler; Caputo operatörü, Riemann Liouville operatörü, Grunwald-Letnikov operatörü gibi bazı operatörlere sahiptir. Bu çalışmanın dördüncü bölümünde ise adı geçen operatörlerden Caputo operatörü kullanılarak kesirli Covid-19 modeli incelenmiştir. Buradaki amaç, Türkiye'deki Covid-19 dinamiklerini Duyarlı-Maruz kalan-İyileşen-Ölen bireyler (SEIRD) modelini kullanarak tanımlamaktır. Bunun için kesirli mertebeye diferansiyel denklem sistemi olarak modellenen SEIRD modeli tasarlanmıştır. Dinamik modelin tüm olası dengeleri, temel üreme sayısı ( $R_0$ ) açısından incelenmiştir. Temel üreme sayısı hesaplama yöntemlerinden yeni nesil matris yöntemi tercih edilmiştir. Kararlılık koşulları Routh-Hurwitz ve Lyapunov kararlılık teorileri ile elde edilmektedir. Ayrıca, hastalısız dengenin global kararlılığına da değinilmiştir. Son olarak Türkiye'deki COVID-19 vakalarının sayısına dayalı olarak sistemin bazı sayısal simülasyonlarına yer verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler tanıtılmaktadır. Ayrıca bölüm kesirli operatör tanımları ve özellikleri de dahil olmak üzere kesirli hesap araçlarına bir girişle başlamaktadır. Daha sonra ise dinamik sistemlerin modelleme ve kontrolünde kullanılan temel kavramlar verilmiştir.

### 2.1. Kesirli Türev ve İntegral Tanımları

Kesirli hesap, klasik integral ve türevin tamsayı olmayan mertebeden  ${}_aD_t^\nu$  operatörüne bir genellemesidir. Burada  $a$  ve  $t$  işlemin limitlerini,  $\nu$  ise kesirli mertebeyi temsil etmektedir. İntegro-diferansiyel operatör

$${}_aD_t^\nu = \begin{cases} d^\nu/dt^\nu, & \operatorname{Re}(\nu) > 0 \\ 1, & \operatorname{Re}(\nu) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\nu}, & \operatorname{Re}(\nu) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 2009). Genellikle  $\nu \in \mathbb{R}$  dir, ancak  $\nu$  kompleks sayı da olabilir (Oustaloup, 2000). Kesirli operatör için matematiksel olarak kabul edilebilir ve ortak birden çok tanım vardır. Örneğin Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Hadamard ve Riesz, vb. gibi (Podlubny, 1999; Diethelm, 2002; Caputo, 1967; Liouville, 1834). Problem formülasyonlarında çoğunlukla Riemann-Liouville ve Caputo kullanılır.

**Tanım 2.1.1. (Gama Fonksiyonu)** Gama fonksiyonu Euler tarafından

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall z > 0$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

Gama fonksiyonunun en önemli özelliklerinden biri olan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

özellliği sebebiyle Gama fonksiyonu faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır. (2.1) özelliği-

nin gösterimi ve faktöriyel ile ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= \left[ -e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

dır. Buradan açıkça  $\Gamma(1) = 1$  olduğu görülmektedir. (2.1) özelliği kullanılarak  $z = 1, 2, 3, \dots$  değerleri için

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

**Tanım 2.1.2. (Grünwald Letnikov Kesirli türevi)**  $f$  fonksiyonu için Grünwald-Letnikov türev tanımını  $\nu > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^\nu f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-\nu} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{\nu}{r} f(t-rh)$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1999).

**Tanım 2.1.3. (Riemann-Liouville Kesirli İntegral ve Türevi)** Her sonlu  $(a, t)$  aralığında  $f$  fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun.  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $n-1 \leq \nu < n$  ve  $\nu > 0$  olmak üzere  $t > a$  için reel bir  $f$  fonksiyonunun  $\nu$ . mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi;

$${}_{RL} D_{a,t}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1-n}} d\tau$$

şeklinde tanımlanır.

Kesirli integral tanımını da  $\nu > 0, \nu \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$${}_{RL}D_{a,t}^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1999).

**Tanım 2.1.4. (Caputo Kesirli Türevi)**  $f$  fonksiyonu,  $n$  defa diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $n-1 < \nu < n$  ve  $t > a$  olmak üzere fonksiyonun  $n$ . mertebeden Caputo kesirli türevinin tanımı;

$${}_{CD}D_{a,t}^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\nu+1-n}} d\tau$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

Kesirli mertebeden türev operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir. Ayrıca bundan sonra kolaylık olması açısından kesirli mertebeden türev operatörü için  $D^{\nu}$  gösterimi kullanılacaktır.

- $\nu = n$  ve  $n \in \mathbb{Z}^+$  ise  $D^{\nu}$  operatörü klasik  $d^n/dt^n$  operatörü olarak anlaşılmalıdır.
- $\nu = 0$  ise  $D^0 f(t) = f(t)$  dir.
- Lineer bir operatördür; yani  $A, B$  sabit olmak üzere

$$D^{\nu}(Af_1(t) + Bf_2(t)) = A D^{\nu} f_1(t) + B D^{\nu} f_2(t)$$

dir.

- $\text{Re}(\nu) > 0, \text{Re}(\beta) > 0$  ve  $f(t)$  ise

$$D^{\nu}[D^{\beta} f(t)] = D^{\beta}[D^{\nu} f(t)] = D^{\nu+\beta} f(t)$$

dir. Kesirli mertebeden türev operatörü tamsayı mertebeden türev operatörü ile yer değiştirebilirdir. Yani

$$\frac{d^n}{dt^n}(D^{\nu} f(t)) = D^{\nu} \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = D^{\nu+n} f(t)$$



dir, ancak alt sınırın  $a$  olması koşulu altında  $f^{(k)}(a) = 0$  sağlanmalıdır ( Podlubny, 1999; Chen, 2009).

**Tanım 2.1.5.**

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ile tanımlı kompleks  $s$  değişkenli  $F(s)$  fonksiyonuna  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

**Tanım 2.1.6.**  ${}_R L D_{a,t}^{\nu} f(t)$  Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü;

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_R L D_{a,t}^{\nu} f(t) dt = s^{\nu} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_R L D_{a,t}^{\nu-k-1} f(t)]_{t=a}, \quad (n-1 \leq \nu < n),$$

${}_C D_{a,t}^{\nu} f(t)$  Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü;

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_C D_{a,t}^{\nu} f(t) dt = s^{\nu} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} f^{(k)}(a), \quad (n-1 < \nu \leq n)$$

olarak elde edilmektedir.

**Tanım 2.1.7.** İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

olarak tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

**Lemma 2.1.8.**  $0 < \alpha < 2$  ve  $\beta$  keyfi bir karmaşık sayı olsun ve  $\mu$  keyfi bir reel sayı olsun, öyle ki  $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$  eşitsizliği sağlansın. Bu durumda keyfi bir  $p \geq 1$  tamsayısı için aşağıdaki genişletmeler geçerli olur:

$|\arg(z)| \leq \mu$  ve  $|z| \rightarrow \infty$  olduğunda;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p})$$

dir;  $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$  ve  $|z| \rightarrow \infty$  olduğunda;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p})$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

**Uyarı 2.1.9.** Lemma (2.1.8)'de  $\beta = \alpha$  ise,  $|\arg(z)| \leq \mu$  ve  $|z| \rightarrow \infty$  iken

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\alpha)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=2}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}) \quad (2.3)$$

dir;  $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$  ve  $|z| \rightarrow \infty$  iken

$$E_{\alpha,\alpha}(z) = - \sum_{k=2}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} + O(|z|^{-1-p}) \quad (2.4)$$

dir (Qian, 2010).

**Tanım 2.1.10.**  $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$  matrisi,  $\lambda$  sayısına karşılık gelen Jordan bloğu

diye adlandırılır.  $k \geq n$  için  $J_\lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & \dots & \binom{k}{n-3}\lambda^{k-n+3} \\ \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{pmatrix}$  şeklinde

hesaplanmaktadır.

## 2.2. Dinamik Sistemlerin Kararlılığı İle İlgili Tanım ve Teoremler

Bu kısımda dinamik sistemlerin kararlılığının incelenmesinde gerekli olan bazı tanım ve teoremler tanıtılmaktadır.

Özdeğerler ve özvektörler, bir matris hakkında bilgi veren matrise ait özelliklerdir. Matematiğin birçok alanında olduğu kadar ekonomi, mühendislik, kuantum mekaniği gibi alanlarda da uygulamaları vardır.

**Tanım 2.2.1. (Özdeğerler ve Özvektörler)**  $A$ ,  $n \times n$  bir kare matris ve  $I_n$  birim matris olmak üzere  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$  denklemini sağlayan  $\lambda$  değerlerine  $A$  matrisinin özdeğerleri

denir. Bulunan her  $\lambda$  değerini  $Ax = \lambda x$  veya  $(A - \lambda I_n)x = 0$  da yerine koyarak elde edilen sıfırdan farklı çözümler,  $A$  matrisinin bu özdeğerine karşı gelen özvektörleridir.

Basit bir örnek verilirse:

**Örnek 2.2.2.**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri bulunsun.  $A$  matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

hesaplandığında  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$  yani  $(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$  olarak bulunur. Bu denklemin köklerinden, özdeğerler  $\lambda_1 = 1$  ve  $\lambda_2 = 3$  olarak elde edilir.

Özvektör denklemi  $(A - \lambda I_2)x = 0$  dir. Yani

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$(2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0$$

şeklindedir.

$\lambda_1 = 1$  değeri için;

$$x_1 + x_2 = 0$$

olur.  $x_2 \neq 0$  için  $\lambda_1 = 1$ 'e karşılık gelen özvektör  $x_1 = \begin{bmatrix} -k \\ k \end{bmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  dir.

$\lambda_2 = 3$  değeri için;

$$x_1 = x_2$$

olur.  $x_2 \neq 0$  için  $\lambda_2 = 3$ 'e karşılık gelen özvektör  $x_2 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  dir.

**Tanım 2.2.3.**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  özdeğerlerine sahip herhangi kompleks veya reel elemanlı  $n \times n$  boyutlu bir  $B$  matrisi için  $\sigma(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$  değerine  $B$  matrisinin spektral yarıçapı denir.

Birinci mertebeden  $n$ -boyutlu dinamik sistemi

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.5)$$

dir. Burada  $t \in \mathbb{R}$ 'dir ve  $F_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ) fonksiyonları birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip sürekli fonksiyonlardır. (2.5) sisteminde  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ,  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^\top$  seçilirse (2.5) sistemine denk olan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = F(x) \quad (2.6)$$

vektör eşitliği elde edilir (Perko, 2013).

**Tanım 2.2.4.**  $t$  bağımsız değişkenini açık olarak içermeyen (2.6) sistemine otonom sistem adı verilir (Allen, 2007).

**Tanım 2.2.5.** (2.6) sisteminde  $F$  ve  $F'$ 'nin çözümü olan sabit değerli bir fonksiyona denge çözümü denir. Denge çözümü yerine kritik nokta terimi de kullanılır. Burada  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$  sabit bir vektördür.

Her  $t$  için

$$F(x^*) = 0$$

koşulunu sağlayan  $x^*$  noktasına (2.6) sisteminin bir denge noktası adı verilir (Allen, 2007).

**Tanım 2.2.6. (Jacobian Matrisi)**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değişkenlerine bağlı  $n$  tane denklemden oluşan

$y = f(x)$  sistemi açıkça aşağıdaki şekilde yazılır;

$$y = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

veya daha açık bir şekilde

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir ve Jacobian matrisi

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Simon, 1994). Buradan yola çıkarak

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

sisteminin  $x^*$  kritik noktalarındaki Jacobian matrisi ise:

$$J(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x^*}$$

şeklinde elde edilir.

Basit bir örnek verilecek olursa;

### Örnek 2.2.7.

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2$$

sisteminin Jacobian matrisi

$$J = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Bir otonom dinamik sistem analiz edilirken yapılması gereken ilk şeylerden biri denge noktalarını, yani sistemin zaman içinde değişmeden kalabileceği durumları bulmaktır. Denge noktaları hem teorik hem de pratik nedenlerle önemlidir. Teorik olarak bunlar sistemin faz uzayındaki (bir sistemin tüm olası durumlarının temsil edildiği bir uzay) kilit noktalardır ve faz uzayının yapısını anlamada anlamlı referanslar olarak hizmet ederler. Pratik olarak sistemi belirli bir durumda sürdürmek istenilen birçok durum vardır. Bu gibi durumlarda, istenilen durumun bir denge noktası olup olmadığını, eğer öyleyse kararlı mı yoksa kararsız mı olduğunu bilmek oldukça önemlidir.

1892’de, A. M. Lyapunov, dinamik sistemlerin kararlılığını belirlemek için iki yöntem geliştirmiştir. Lyapunov’un ikinci yönteminin özü, sistem çözümlerinin kararlılık analizi için uygun bir Lyapunov fonksiyonu seçmek ve bu fonksiyonu, kararlılığı gösterecek şekilde incelemektir. Eğer seçilen fonksiyon kararlılık koşullarını sağlıyorsa Lyapunov fonksiyonudur. Böylece Lyapunov fonksiyonu tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

**Tanım 2.2.8. (Lyapunov Fonksiyonu)**  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$  ve  $x^*$  sürekli türevlenebilir bir  $\dot{x} = F(x)$  denklem sistemi için bir denge noktası olsun. Bir  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  Lyapunov fonksiyonu,  $x^*$ ’ın  $U$  komşuluğunda tanımlı sürekli ve  $U \setminus \{x^*\}$  üzerinde sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

1)  $x = x^*$  için  $V(x) = 0$  ve  $x \neq x^*$  için  $V(x) > 0$ , yani  $V$  pozitif tanımlıdır.

2)  $\forall x \in U \setminus \{x^*\}$  için  $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x)$  dir (Lyapunov, 1992).

**Örnek 2.2.9.**

$$\dot{x} = -x + xy$$

$$\dot{y} = -x^2 - y$$

sistemi için pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu  $V(x,y) = x^2 + y^2$  olarak seçilebilir. Çünkü  $V(x,y)$  fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} \\ &= 2x[-x + xy] + 2y[-x^2 - y] \\ &= -2x^2 + 2x^2y - 2x^2y - 2y^2 \\ &= -2x^2 - 2y^2\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece Tanım (2.2.8)' deki 1. ve 2. koşullar sağlanmış olur.

Kesirli mertebeden bir dinamik sistem kesirli mertebeden bir diferansiyel denklem kullanılarak aşağıdaki biçimde tanımlanabilir ( Podlubny, 1994; Podlubny, 1999; Chen, 2009).

**Tanım 2.2.10. (Kesirli Mertebeden Dinamik Sistemler)** Kesirli mertebeden dinamik sistemler en genel halde,

$$\begin{aligned}a_n D^{v_n} y(t) + a_{n-1} D^{v_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{v_0} y(t) \\ = b_m D^{\gamma_m} u(t) + b_{m-1} D^{\gamma_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\gamma_0} u(t)\end{aligned}$$

ile gösterilir. Burada  $(i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m)$  için  $a_i$  ve  $b_j$  sabit sayılardır;  $v_i$  ve  $\gamma_j$  keyfi reel sayılardır.

**Tanım 2.2.11. (Routh-Hurwitz Kriteri)** Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $a_i$  katsayıları reel sabitleri göstermek üzere

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

polinomuna karşılık gelen Hurwitz matrisi  $j > n$  iken  $a_j = 0$  olmak üzere

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

şeklindedir.  $P(z)$  polinomunun bütün köklerinin negatif olması ya da negatif kısımlara sahip olması için gerek ve yeter koşul karşılık gelen Hurwitz matrisinin bütün esas asli minörlerinin pozitif olmasıdır, yani

$$\det(H_j) > 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

olmasıdır. Başka bir ifade ile  $P(z)$  polinomunun kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(H_1) = |a_1| > 0, \\ D_2 &= \det(H_2) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ D_3 &= \det(H_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ D_n &= \det(H_n) > 0 \end{aligned}$$

olmasıdır (Allen, 2007).

**Teorem 2.2.12. (La Salle Değişmezlik Prensibi)**  $\Omega \subset D \subset \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $\Omega$  kümesi  $\dot{x} = f(x)$  şeklinde verilen doğrusal olmayan denklem sisteminin pozitif olarak değişmez kümesi olsun.  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli ve türevlenebilen fonksiyon ve  $\Omega$  kümesinin içinde  $\dot{V}(x) \leq 0$  olsun.  $D$  kümesi,  $\Omega$  içinde  $\dot{V}(x) = 0$  olan noktalardan oluşsun.  $M$  ise  $D$  kümesi içindeki en büyük değişmez küme olsun. Bu durumda  $\Omega$  içinde başlayan her çözüm  $t \rightarrow \infty$  iken  $M$  kümesine gider (LaSalle, 1976).

Matematiksel model ve hesaplamalar, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji ve ekonomi



gibi birçok alanlarda uygulanmaktadır. Biyolojideki matematiksel modellerin kararlılık analizi için temel üreme sayısına gereksinim vardır.

**Tanım 2.2.13. (Temel Üreme Sayısı)** Tamamen duyarlı bir popülasyonda, tek bir enfekte bireyin enfeksiyon süresi boyunca ortalama ikincil enfeksiyon sayısı olarak tanımlanan temel üreme sayısı veya  $R_0$ , bulaşıcı hastalık dinamiklerinin incelenmesi için temel ve sıklıkla kullanılan kriterlerden biridir (Diekmann, 1990). Öyle ki, eğer  $R_0 < 1$  ise, her bir enfekte birey ortalama olarak birden az kişiye enfekte eder ve hastalık yayılamaz. Bu nedenle hastalık toplumda kalıcı olmayı bırakacaktır. Ancak eğer  $R_0 > 1$  ise hastalık yayılabilir ve dolayısıyla devam edebilir (Heesterbeek, 1996). Görünen o ki, bir yerde salgın veya pandemi varsa,  $R_0 < 1$  sağlayabilecek koşulların olması toplum sağlığı açısından önemlidir.

### 3. KARARLILIK ANALİZİ VE İLGİLİ YÖNTEMLER

Kesirli mertebeden denklemlerin kararlılık analizi, klasik denklemlerin kararlılık analizine benzer şekilde incelenmektedir. Bunun için klasik dinamik sistemlerde kullanılan yöntemleri uygulamak gerekmektedir. Dolayısıyla bu kısımda öncelikle klasik dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan bazı yöntemler tanıtılmıştır. Devamında da kesirli mertebeden sistemlerin kararlılık analizi ele alınmıştır.

#### 3.1. Klasik Sistemlerin Kararlılık Analizi

$\dot{x} = f(x)$  bağıntısıyla ifade edilen bir sistemin denge noktaları  $f(x) = 0$  eşitliğinin reel kökleri idi. Denge noktası kavramı sistem dinamiklerini anlamada önemli rol oynar. Sistemin bir çözümünün uzun vadeli davranışı denge noktasının kararlılık analizi ile belirlenebilir. Ancak sistem çözümlerinin kararlılığını belirlemek için yöntemler sınırlıdır. Lyapunov'un bu sistem çözümlerinin kararlılık analizi için iki yöntemi bulunmaktadır. Birinci yöntem sistemin açık çözümünü kullanarak kararlılığı dolaylı olarak analiz eder. Ancak bu yöntemde doğrusal olmayan ya da zamanla değişen dinamik sistemlerin denklemlerinin çözümü son derece zor olduğundan uygulanması zordur. Bunun yerine Lyapunov'un ikinci yöntemi çözüm olmadan bir fonksiyon oluşturarak kararlılığı doğrudan belirleyebilir.

Denge çözümünün analizi aşağıdaki gibi yapılabilir:

- Eğer denge çözümü yakınında başlayan her çözüm denge çözümü yakınında kalıyorsa denge çözümüne karardır denir.
- Denge çözümü yakınındaki tüm çözümler denge çözümüne yakın kalıp aynı zamanda denge çözümüne yöneliyorsa denge çözümüne asimptotik karardır denir.
- Denge çözümü kararlı değil ise kararsızdır denir.

Denge noktasının kararlılık analizi Lyapunov anlamda aşağıdaki gibidir.

**Teorem 3.1.1.** a) Her  $\varepsilon > 0$  ve her  $t \geq t_0 > 0$  için

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta$$

olduğunda

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  var ise  $x^*$  denge noktasına Lyapunov kararlıdır denir.

b) Eğer  $x^*$  denge noktası Lyapunov kararlı ve

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta$$

olduğunda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  var ise  $x^*$  denge noktasına asimptotik kararlıdır denir.

Lyapunov'un ikinci yöntemine göre kararlılık durumları aşağıdaki teoremler yardımıyla belirlenebilir.

**Teorem 3.1.2. (Lyapunov Kararlılığı)** Eğer denge noktası civarında sürekli ve ayrıca birinci türevi de sürekli olmak kaydıyla aşağıdaki şartları sağlayan skaler bir  $V(x)$  fonksiyonu varsa,

- $V(x)$  pozitif tanımlı,
- $\dot{V}(x) \leq 0$ ; yani  $\dot{V}(x)$  negatif yarı tanımlı ise

denge noktası civarında sistem kararlıdır.

**Teorem 3.1.3. (Lyapunov Asimptotik Kararlılığı)** Eğer denge noktası civarında sürekli ve ayrıca birinci türevi de sürekli olmak kaydıyla aşağıdaki şartları sağlayan skaler bir  $V(x)$  fonksiyonu varsa,

- $V(x)$  pozitif tanımlı,
- $\dot{V}(x) < 0$ ; yani  $\dot{V}(x)$  negatif tanımlı ise

denge noktası civarında sistem asimptotik kararlıdır.

**Örnek 3.1.4.**  $\beta$  skaler bir sayı olmak üzere aşağıdaki sistem göz önünde bulundursun:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(x^2 + y^2 - \beta^2) + y \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2 - \beta^2)\end{aligned}$$

Lyapunov fonksiyonu  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  olarak seçilsin. Bu durumda (2.2.8) tanımının birinci koşulu  $V(0, 0) = 0$  ve  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  için  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) > 0$  olarak sağlanır. Türev fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \\ &= x \cdot [x(x^2 + y^2 - \beta^2) + y] + y[-x + y(x^2 + y^2 - \beta^2)] \\ &= x^2(x^2 + y^2 - \beta^2) + y^2(x^2 + y^2 - \beta^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \beta^2)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $V(x) > 0$  ve  $(x^2 + y^2) \leq \beta^2$  ise kararlı,  $(x^2 + y^2) < \beta^2$  ise asimptotik kararlıdır (Saedd, 2017).

**Örnek 3.1.5.**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + xy, \\ \dot{y} &= -x^2\end{aligned}$$

sistemi için Lyapunov fonksiyonu belirlenerek sistemin kararlılığına bakılacak olursa;  $V(x, y) = x^2 + y^2$  Lyapunov fonksiyonu olarak seçildiğinde türev fonksiyonu

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \\ &= 2x[-x + xy] + 2y[-x^2] \\ &= -2x^2 + 2x^2y - 2x^2y \\ &= -2x^2 \\ &= -2x^2 \leq 0\end{aligned}$$

olarak bulunur. Fonksiyonun türevi,  $x = 0$ 'da 0 ve  $x \neq 0$  için negatif olup, bundan dolayı negatif yarı tanımlıdır ve dolayısıyla sistem Lyapunov kararlıdır.

Linear bir sistemin kararlılığını özdeğer ve özvektör aracılığı ile nasıl incelendiğini genel hatları ile göstermek için aşağıda iki boyutlu lineer bir sistemin kararlılığından bahsedilecektir.

$A$  katsayı matrisi olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

şeklinde iki boyutlu lineer ve otonom bir sistem,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlansın. (3.1) lineer sisteminin  $(0,0)$  kritik noktasını incelemek için özdeğer ve özvektörleri bulunması gerekmektedir. Burada  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$  katsayılar matrisinin  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  özdeğerleri,

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0$$

karakteristik denkleminin çözümleridir. Buradan (3.1) sisteminin  $(0,0)$  kritik noktasının yapısı  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  köklerinin yapısıyla belirlenir. Buna göre aşağıdaki durumlar ortaya çıkmaktadır.

- $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri reel ve aynı işaretlidir.
- $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri reel ve zıt işaretlidir.
- $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri eşlenik kompleks, ancak sırf sanal değildir.
- $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri sırf sanaldır.

Karakteristik denkleminin  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri reel ve aynı işaretli olsun.  $\lambda_1 < 0$  ve  $\lambda_2 < 0$  ise kritik nokta asimptotik kararlı,  $\lambda_1 > 0$  ve  $\lambda_2 > 0$  ise kritik nokta kararsızdır. Karakteristik denkleminin  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri reel ve zıt işaretli olsun. Bu durumda kritik nokta kararsızdır. Karakteristik denkleminin  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri eşlenik kompleks, ancak sırf sanal değil ve  $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$  olmak üzere  $a < 0$  ise kritik nokta asimptotik kararlı,  $a > 0$  ise kritik nokta kararsızdır. Karakteristik denkleminin  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  kökleri sırf sanal olsun. Bu durumda kritik nokta kararsızdır.

### 3.2. Kesirli Mertebeden Sistemlerin Kararlılık Analizi

Bu bölümde Riemann-Liouville ve Caputo gibi türevli kesirli mertebeden sistemlerin kararlılık analizi incelenmiştir.

#### 3.2.1. Riemann-Liouville Türevini İçeren Kesirli Mertebeden Sistemler

Riemann-Liouville kesirli türevli aşağıdaki lineer kesirli diferansiyel sistemi ele alınsın

$${}_{RL}D_{0,t}^{\nu}x(t) = Ax(t), \quad (0 < \nu < 1). \quad (3.2)$$

Burada  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^{\top} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve başlangıç koşulu aşağıdaki gibi verilir.

$${}_{RL}D_{0,t}^{\nu-1}x(t)|_{t=0} = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^{\top}. \quad (3.3)$$

Sistem (3.2)'nin kararlılığı,  $A$  sıfır olmayan tüm özdeğerlere sahip olduğunda ve ayrıca  $A$ 'nın bazı sıfır özdeğerlerine sahip olduğunda analiz edilmektedir.

**Teorem 3.2.1.** (3.2) sistemindeki  $A$  matrisinin tüm özdeğerleri

$$|\arg(\lambda(A))| > \frac{\nu\pi}{2} \quad (3.4)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (3.2) sisteminin sıfır çözümü asimptotik olarak kararludur (Qian, 2010).

**İspat.** (3.2) üzerinde Laplace dönüşümü alınarak elde edilen eşitlikte (3.3) değeri yazılırsa

$$X(s)s^{\nu} - x_0 = AX(s)$$

eşitliği elde edilir. Buradan sistem (3.2)'in çözümü aşağıdaki şekilde verilir:

$$x(t) = x_0 t^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(At^{\nu}). \quad (3.5)$$

İlk olarak,  $A$  matrisinin köşegenleştirilebilir olduğu varsayalım, yani bir  $n \times n$  boyutlu terslenebilir  $T$  matrisi  $T^{-1}AT$  köşegen matris olacak şekilde var olsun:

$$\Lambda = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (3.6)$$

Ardından

$$E_{v,v}(At^v) = TE_{v,v}(\Lambda t^v)T^{-1} = T \text{diag}[E_{v,v}(\lambda_1 t^v), E_{v,v}(\lambda_2 t^v), \dots, E_{v,v}(\lambda_n t^v)]T^{-1}$$

olarak elde edilir. (3.4) ve (2.4) uygulandığında  $t \rightarrow +\infty$  ve  $1 \leq i \leq n$  iken

$$E_{v,v}(\lambda_i t^v) = - \sum_{k=2}^p \frac{(\lambda_i t^v)^{-k}}{\Gamma(v-kv)} + O(|\lambda_i t^v|^{-1-p}) \rightarrow 0$$

dır. Böylece,

$$\|E_{v,v}(\Lambda t^v)\| = \|\text{diag}[E_{v,v}(\lambda_1 t^v), E_{v,v}(\lambda_2 t^v), \dots, E_{v,v}(\lambda_n t^v)]\| \rightarrow 0$$

dır. Buradan da istenilen sağlanmaktadır.

Daha sonra,  $A$  matrisinin bir Jordan kanonik formuna benzer olduğu varsayılınsın, yani bir  $T$  matrisi

$$J = T^{-1}AT = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r), \quad (3.7)$$

olacak şekilde var olsun. (3.7) eşitliğindeki  $J_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  matrisleri aşağıdaki forma sahiptir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$$

ve  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  dir. Açıkça  $E_{v,v}(At^v) = T \text{diag}[E_{v,v}(J_1 t^v), E_{v,v}(J_2 t^v), \dots, E_{v,v}(J_r t^v)]T^{-1}$  dir. Bu-

rada  $C_k^j$ ,  $1 \leq j \leq n_i - 1$  binom katsayıları olmak üzere  $1 \leq i \leq r$  için

$$\begin{aligned}
E_{v,v}(J_i t^v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_i t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} J_i^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^v)^k}{\Gamma(vk+v)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{v,v}(\lambda_i t^v) & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} E_{v,v}(\lambda_i t^v) & \dots & \frac{1}{(n_i-1)!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^{n_i-1} E_{v,v}(\lambda_i t^v) \\ & E_{v,v}(\lambda_i t^v) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} E_{v,v}(\lambda_i t^v) \\ & & & E_{v,v}(\lambda_i t^v) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Bazı hesaplamalar yapılarak ve (2.1.9) eşitliği göz önünde bulundurularak  $|\arg(\lambda_i(A))| > \frac{v\pi}{2}$ ,  $1 \leq i \leq r$  ve  $t \rightarrow \infty$  ise

$$|E_{v,v}(\lambda_i t^v)| \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \left| \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^j E_{v,v}(\lambda_i t^v) \right| \rightarrow 0, \quad 0 \leq j \leq n_i - 1, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Burada aşağıdaki gibi hesaplamalar yapılmıştır:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^j E_{v,v}(\lambda_i t^v) &= \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^j \left\{ - \sum_{k=2}^p \frac{(\lambda_i t^v)^{-k}}{\Gamma(v-vk)} + O(|\lambda_i t^v|^{-1-p}) \right\} \\
&= - \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^j (k+j-1) \dots (k+1) k \lambda_i^{-k-j} t^{-vk}}{j! \Gamma(v-vk)} + O(|\lambda_i|^{-1-p-j} |t^v|^{-1-p}) \\
&= - \sum_{k=2}^p \frac{(-1)^j (k+j-1)! \lambda_i^{-k-j} t^{-vk}}{j! (k-1)! \Gamma(v-vk)} + O(|\lambda_i|^{-1-p-j} |t^v|^{-1-p}).
\end{aligned} \tag{3.8}$$



Buradan sıfır olmayan keyfi bir  $x_0$  başlangıç değeri için  $t \rightarrow \infty$  olduğunda  $\|x(t)\| = \|x_0 t^{v-1} E_{v,v}(At^v)\| \rightarrow 0$  dir. ■

**Uyarı 3.2.2.** Teorem (3.2.1)'in ispatından,  $t^{-1-v}$  gibi durum bileşenlerinin 0'a yaklaşmakta olduğu görülebilir (Qian, 2010).

**Teorem 3.2.3.** (3.2) sistemindeki  $A$  matrisinin tüm özdeğerleri

$$|\arg(\lambda(A))| \geq \frac{v\pi}{2} \quad (3.9)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ve  $|\arg(\lambda(A))| = \frac{v\pi}{2}$  eşitliğini sağlayan kritik özdeğerler aynı cebirsel ve geometrik katlılıklara sahipse sistemin sıfır çözümü kararlıdır, ancak asimptotik olarak kararlı değildir (Qian, 2010).

**İspat.** Genelliği kaybetmeden, her ikisi de bire eşit olan cebirsel ve geometrik katlılık ile  $|\arg(\lambda_i)| = \frac{v\pi}{2}$ 'yi sağlayan  $\lambda_i$ 'nin  $A$  matrisinin kritik bir özdeğeri olduğu varsayalım. Buradan (3.5) eşitliğinden sistem (3.2)'in çözümü aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 t^{v-1} E_{v,v}(At^v) \\ &= x_0 t^{v-1} T \text{diag}[E_{v,v}(J_1 t^v), \dots, E_{v,v}(J_{i-1} t^v), E_{v,v}(\lambda_i t^v), E_{v,v}(J_{i+1} t^v), \dots, E_{v,v}(J_r t^v)] T^{-1}. \end{aligned}$$

Burada  $J_k$ 'ler  $k$ . mertebeden Jordan blok matrisleridir,  $|\arg(\lambda_k(A))| > \frac{v\pi}{2}$  ve  $\sum_{k=1}^{i-1} n_k + \sum_{k=i+1}^r n_k + 1 = n$ ,  $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, r$  dir. (2.3) eşitliğinden

$$E_{v,v}(\lambda_i t^v) = \frac{1}{v} (\lambda_i t^v)^{(1-v)/v} \exp((\lambda_i t^v)^{1/v}) - \sum_{k=2}^p \frac{(\lambda_i t^v)^{-k}}{\Gamma(v - vk)} + O(|\lambda_i t^v|^{-1-p})$$

elde edilir.  $r$ ,  $\lambda_i$ 'nin modülü ve  $i^2 = -1$  olmak üzere  $\lambda_i = r(\cos \frac{v\pi}{2} + i \sin \frac{v\pi}{2})$  olarak alınsın. Bu

durumda denklem

$$\begin{aligned}
E_{v,v}(\lambda_i t^v) &= \frac{1}{v} \left( r t^v \left( \cos \frac{v\pi}{2} + i \sin \frac{v\pi}{2} \right) \right)^{(1-v)/v} \exp \left\{ \left( r t^v \left( \cos \frac{v\pi}{2} + i \sin \frac{v\pi}{2} \right) \right)^{1/v} \right\} \\
&\quad - \sum_{k=2}^p \frac{(r t^v (\cos \frac{v\pi}{2} + i \sin \frac{v\pi}{2}))^{-k}}{\Gamma(v - vk)} + O \left( \left| r t^v \left( \cos \frac{v\pi}{2} + i \sin \frac{v\pi}{2} \right) \right|^{-1-p} \right) \\
&= \frac{1}{v} \left( r^{(1-v)/v} t^{1-v} \left( \cos \frac{(1-v)\pi}{2} + i \sin \frac{(1-v)\pi}{2} \right) \right) \exp \left\{ r^{1/v} t \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_{k=2}^p \frac{(r^{-k} t^{-vk} (\cos \frac{-vk\pi}{2} + i \sin \frac{-vk\pi}{2}))}{\Gamma(v - vk)} + O((r t^v)^{-1-p}) \\
&= \frac{1}{v} \left( r^{(1-v)/v} t^{1-v} \left( \sin \frac{v\pi}{2} + i \cos \frac{v\pi}{2} \right) \right) \exp \{ i r^{1/v} t \} \\
&\quad - \sum_{k=2}^p \frac{(r^{-k} t^{-vk} (\cos \frac{vk\pi}{2} - i \sin \frac{vk\pi}{2}))}{\Gamma(v - vk)} + O((r t^v)^{-1-p})
\end{aligned}$$

halini alır ve böylece

$$\begin{aligned}
t^{v-1} E_{v,v}(\lambda_i t^v) &= \frac{1}{v} \left( r^{(1-v)/v} \left( \sin \frac{v\pi}{2} + i \cos \frac{v\pi}{2} \right) \right) \exp \{ i r^{1/v} t \} \\
&\quad - t^{v-1} \sum_{k=2}^p \frac{(r^{-k} t^{-vk} (\cos \frac{vk\pi}{2} - i \sin \frac{vk\pi}{2}))}{\Gamma(v - vk)} + O(t^{-pv-1})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının ilk teriminin mutlak değeri  $\frac{1}{v} r^{(1-v)/v}$  dir. Terimlerin geri kalanı ise  $t \rightarrow \infty$  iken sifıra yaklaşır. Teorem (3.2.1)'in ispatından  $k = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, r$  için  $t \rightarrow +\infty$  iken  $E_{v,v}(J_k t^v)$  sifıra yaklaşır. Bütün bunlar, sistem (3.2)'nin sifir çözümünün kararlı olduğunu, ancak asimptotik olarak kararlı olmadığını gösterir. ■

**Uyarı 3.2.4.** Teorem (3.2.3)'te, kritik özdeğerler, cebirsel katlılıkları geometrik katlılıklarından daha büyük olacak ve diğer koşullar değişmeyecek şekilde ise, sonuç geçerli değildir (Qian, 2010).

Genelliği kaybetmeden,  $\lambda_i$  kritik özdeğerinin  $n_i$  cebirsel katlılığı  $n'_i$  geometrik katlılığından daha büyük olduğunu, yani  $\lambda_i$ 'nin  $n_i$  mertebeden bir  $J_i$  Jordan bloğuna karşılık geldiği varsayalım. Teorem (3.2.1)'deki  $E_{v,v}(J_i t^v)$  ifadesine bakılarak burada  $\arg(\lambda_i)$ 'nin mutlak değerinin  $\frac{v\pi}{2}$  olduğuna dikkat edilmelidir. Teorem (3.2.3)'ün ispatından,  $E_{v,v}(J_i t^v)$  deki  $E_{v,v}(\lambda_i t^v)$  köşegen elemanları aynıdır ve  $|t^{v-1} E_{v,v}(\lambda_i t^v)|$  mutlak değeri bir sabit olduğu görülür.

$E_{v,v}(J_i t^v)$ 'deki sağ üst elemanlar aşağıda incelenmektedir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^j E_{\nu, \nu}(\lambda_i t^\nu) &= \frac{1}{j!} \left\{ \frac{(1-\nu)(1-2\nu)\cdots(1-j\nu)}{\nu^{j+1}} t^{1-\nu} \lambda_i^{\frac{1-(j+1)\nu}{\nu}} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_{j+1}^{j-1}(1-\nu)}{\nu^{j+1}} t^{j-\nu} \lambda_i^{\frac{1-(j+1)\nu}{\nu}} + \frac{1}{\nu^{j+1}} t^{j+1-\nu} \lambda_i^{\frac{(j+1)(1-\nu)}{\nu}} \right\} \exp \left\{ \lambda_i^{1/\nu} t \right\} \\
&\quad + \frac{1}{j!} \sum_{k=2}^p \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-j+1) \lambda_i^{-k-j} t^{-\nu k}}{\Gamma(\nu - \nu k)} \\
&\quad + O(|\lambda_i|^{-1-p-j} t^{-(1+p)\nu}), \quad (1 \leq j \leq n_i - 1). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

(3.10) eşitliğinden,  $1 \leq j \leq n_i - 1$  olmak üzere  $t \rightarrow +\infty$  iken

$$\begin{aligned}
\left| t^{\nu-1} \frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^j E_{\nu, \nu}(\lambda_i t^\nu) \right| &\geq \frac{1}{j!} \left\{ \left| \frac{t^j}{\nu^{j+1}} \lambda_i^{\frac{(j+1)(1-\nu)}{\nu}} \right| - \left| \frac{(1-\nu)(1-2\nu)\cdots(1-j\nu)}{\nu^{j+1}} \lambda_i^{\frac{1-(j+1)\nu}{\nu}} \right| \right. \\
&\quad \left. - \cdots - \left| \frac{C_{j+1}^{j-1}(1-\nu)t^{j-1}}{\nu^{j+1}} \lambda_i^{\frac{j-(j+1)\nu}{\nu}} \right| \right\} \exp \left\{ \lambda_i^{1/\nu} t \right\} \\
&\quad - \frac{1}{j!} \sum_{k=2}^p \frac{|(-k)(-k-1)\cdots(-k-j+1) \lambda_i^{-k-j} t^{-\nu k-1+\nu}|}{|\Gamma(\nu - \nu k)|} + O(t^{-1-p\nu}) \\
&= \frac{t^j}{j! \nu^{j+1}} |\lambda_i|^{\frac{(j+1)(1-\nu)}{\nu}} - \frac{|(1-\nu)(1-2\nu)\cdots(1-j\nu)|}{j! \nu^{j+1}} |\lambda_i|^{\frac{1-(j+1)\nu}{\nu}} \\
&\quad - \cdots - \frac{t^{j-1} C_{j+1}^{j-1}(1-\nu)}{j! \nu^{j+1}} |\lambda_i|^{\frac{1-(j+1)\nu}{\nu}} \\
&\quad - \sum_{k=2}^p \frac{(k+j-1)!}{j!(k-1)!} \frac{|\lambda_i|^{-k-j} t^{-\nu k-1+\nu}}{|\Gamma(\nu - \nu k)|} + O(t^{-1-p\nu}) \\
&\rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

dir. Çünkü son eşitliğin ilk terimi en yüksek dereceli terimdir. Bu nedenle, (3.2) sisteminin sıfır çözümü kararsızdır.

### 3.2.2. Caputo Türevini İçeren Kesirli Mertebeden Sistemler

Bu kısımda Caputo türevini içeren aşağıdaki kesirli diferansiyel sistemi incelenmiştir.

$${}_C D_{0,t}^\nu x(t) = Ax(t), \tag{3.11}$$

$x(0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^\top$  başlangıç değeridir ve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ ,  $\nu \in (0, 1)$  ve  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dir. (3.11) sisteminin dengesinin kararlılığı Matignon tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmış ve belirlenmiştir (Matignon, 1996):

**Tanım 3.2.5.** (3.11) otonom sistemi

- i) kararlıdır ancak ve ancak keyfi bir  $x_0$  için öyle bir  $\varepsilon > 0$  vardır ki  $t \geq 0$  için  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  dir;
- ii) asimptotik kararlıdır ancak ve ancak  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$  dir.

**Teorem 3.2.6.** (3.11) otonom sistemi

- a) asimptotik kararlıdır ancak ve ancak  $|\arg(\lambda(A))| > \frac{\nu\pi}{2}$  dir. Bu durumda  $t^{-\nu}$  gibi durum bileşenleri 0 a doğru azalır.
- b) kararlıdır ancak ve ancak ya asimptotik olarak kararlıdır ya da  $|\arg(\lambda(A))| > \frac{\nu\pi}{2}$  yi sağlayan özdeğerler bir geometrik katlılığına sahiptir.

**İspat.** Caputo için başlangıç değeri  $x(0) = x_0$  olan  ${}_C D_{0,t}^\nu x(t) = Ax(t)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  denkleminin çözümü teorem (3.2.1)'in ispatındaki gibi hesaplanarak  $x(t) = x_0 E_{\nu,1}(At^\nu)$  olarak bulunur. (3.6) eşitliğinden

$$E_{\nu,1}(At^\nu) = T E_{\nu,1}(\Lambda t^\nu) T^{-1} = T \text{diag}[E_{\nu,1}(\lambda_1 t^\nu), E_{\nu,1}(\lambda_2 t^\nu), \dots, E_{\nu,1}(\lambda_n t^\nu)] T^{-1} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.4) eşitsizliği ve (2.4) denklemini, (3.12) eşitliğinde uygulandığında  $t \rightarrow +\infty$  ve  $1 \leq i \leq n$  iken

$$E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) = - \sum_{k=2}^p \frac{(\lambda_i t^\nu)^{-k}}{\Gamma(1-\nu k)} + 0(|\lambda_i t^\nu|^{-1-p}) \rightarrow 0,$$

$$\|E_{\nu,1}(\Lambda t^\nu)\| = \|\text{diag}[E_{\nu,1}(\lambda_1 t^\nu), E_{\nu,1}(\lambda_2 t^\nu), \dots, E_{\nu,1}(\lambda_n t^\nu)]\| \rightarrow 0$$

olmaktadır. A matrisinin bir Jordan kanonik formuna benzer olduğu kabul edilirse (3.7) eşitliğinden

$$E_{\nu,1}(At^\nu) = T \text{diag}[E_{\nu,1}(J_1 t^\nu), E_{\nu,1}(J_2 t^\nu), \dots, E_{\nu,1}(J_n t^\nu)] T^{-1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
E_{\nu,1}(J_i t^\nu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_i t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} J_i^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} C_k^{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t^\nu)^k}{\Gamma(\nu k + 1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) & \dots & \frac{1}{(n_i-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^{n_i-1} E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) \\ & E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) \\ & & & E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$1 \leq i \leq r$  ve  $t \rightarrow \infty$  iken  $|E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu)| \rightarrow 0$  ve  $|\frac{1}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\right)^j E_{\nu,1}(\lambda_i t^\nu)| \rightarrow 0$ ; ( $0 \leq j \leq n_i - 1$ ,  $1 \leq i \leq r$ ) dir. Burada hesaplamalar (3.8) eşitliğindeki gibi yapılmıştır.

$t \rightarrow \infty$  olduğunda  $\|x(t)\| = \|x_0 E_{\nu,1}(A t^\nu)\| \rightarrow 0$  dir. ■

**Teorem 3.2.7.** (3.11) sistemindeki  $A$  matrisinin sıfır olmayan tüm özdeğerlerinin (3.9) eşitsizliğini sağladığını,  $|\arg(\lambda(A))| = \frac{\nu\pi}{2}$  eşitliğini sağlayan kritik özdeğerlerin aynı cebirsel ve geometrik katlılıklara sahip olduğunu ve  $A$ 'nın bir Jordan blok matrisi  $diag(J_1, J_2, \dots, J_{n_i})$ 'ye karşılık gelen  $k$ -katlı sıfır özdeğerlerine sahip bir Jordan blok matrisi olduğu varsayalım. Bu durumda,  $J_l$   $n_l$  mertebeden bir Jordan kanonik formu,  $\sum_{l=1}^i n_l = k$  ve  $n_l \nu \leq 1$ , ( $1 \leq l \leq i$ ) olmak üzere sisteminin sıfır çözümü kararlıdır ancak asimptotik kararlı değildir (Qian, 2010).

**İspat.**  $A$ 'nın  $k$ -katlı basit sıfır özdeğerleri varsa,

$$x(t) = x_0 t^{\nu-1} T \underbrace{diag \left[ Q, \frac{1}{\Gamma(\nu)}, \dots, \frac{1}{\Gamma(\nu)} \right]}_k T^{-1}$$

dır.  $T$ , Teorem (3.2.1) veya (3.2.3)'dekiyle aynı anlama sahip olduğunda,  $Q$ ,  $A$ 'nın sıfır olmayan tüm özdeğerlerine karşılık gelir ve  $t^{\nu-1}Q$  sınırlıdır. Dolayısıyla bu durumda sıfır çözüm kararlıdır ancak asimptotik olarak kararlı değildir. Şimdi  $k$ -katlı sıfır özdeğerlerine karşılık gelen Jordan kanonik formunu incelemek gerekirse basit bir hesaplamayla

$$\frac{1}{j!} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^j E_{\nu, \nu}(\lambda t^\nu) \Big|_{\lambda=0} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)\lambda^{k-j} t^{\nu k}}{j! \Gamma(\nu k + \nu)} \Big|_{\lambda=0} = \frac{t^{\nu j}}{\Gamma(\nu j + \nu)}$$

dır.  $n_l$  katlılığına sahip sıfır özdeğer,  $n_l \times n_l$ ,  $1 \leq l \leq i$  mertebeden aşağıdaki Jordan kanonik bloğuna karşılık gelir;

$$J_{n_l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\nu)} & \frac{t^\nu}{\Gamma(2\nu)} & \cdots & \frac{t^{(n_l-1)\nu}}{\Gamma(n_l\nu)} \\ & \frac{1}{\Gamma(\nu)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t^\nu}{\Gamma(2\nu)} \\ & & & \frac{1}{\Gamma(\nu)} \end{pmatrix}_{n_l \times n_l}.$$

Yani  $n_l\nu \leq 1$  koşulu altında  $t^{\nu-1}J_{n_l}$ 'nin  $1 \leq l \leq i$ ,  $t > t_0 > 0$  ile sınırlı olduğu görülmektedir.

Bu nedenle, sıfır çözüm kararlıdır ancak asimptotik olarak kararlı değildir. ■

**Uyarı 3.2.8.** a) (3.11) sistemindeki  $A$  matrisinin sıfır olmayan tüm özdeğerlerinin (3.4) eşitsizliğini sağladığını ve  $A$ 'nın  $\text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_{n_i})$ 'ye karşılık gelen  $k$ -katlı sıfır özdeğerlerine sahip bir Jordan blok matrisi olduğu varsayalım. Burada  $J_l$ ,  $n$  mertebeden bir Jordan kanonik formudur,  $\sum_{l=1}^i n_l = k$ , ve  $n_l\nu < 1$ ,  $1 \leq l \leq i$  dir. (3.2) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

b) (3.11) sistemindeki  $A$  matrisinin sıfır olmayan tüm özdeğerlerinin (3.9) eşitsizliğini sağladığını,  $|\arg(\lambda(A))| = \frac{\nu\pi}{2}$ 'yi sağlayan kritik özdeğerlerin aynı cebirsel ve geometrik katlılıklara sahip olduğu ve  $A$ 'nın sıfır özdeğerinin aynı cebirsel ve geometrik katlılıklara sahip olduğu varsayalım.  ${}_C D_{0,t}^\nu x(t) = Ax(t)$  sisteminin,  $\nu \in (0, 1)$  sıfır çözümü kararlıdır ancak asimptotik kararlı değildir.  $A$ 'nın sıfır özdeğeri, birden büyük mertebeden bir Jordan bloğuna karşılık geliyorsa, sıfır çözümler kararsızdır.

c)  ${}_C D_{0,t}^\nu x(t) = Ax(t)$ 'nin,  $\nu \in (0, 1)$  sıfır çözümü  $A$ 'nın sıfır özdeğeri olduğu sürece  $A$ 'nın geri kalan özdeğerlerinin nerede olduğuna bakılmaksızın asla asimptotik olarak kararlı değildir. Bu gerçek,  $x(t) = x(0)E_{\nu,1}(At^\nu)$  çözümünün var olması ve Teorem (3.2.7)'nin ispatından görülebilir.

**Tanım 3.2.9.**  $z^*$  sabitinin,  ${}_C D_t^\nu z(t) = f(t, z(t))$ ,  $\nu \in (0, 1)$  olarak verilen Caputo kesirli dinamik sistemin bir denge noktası olması için gerek ve yeter şart  $f(t, z^*) = 0$  olmasıdır.

Aşağıda bir örnekle salgın hastalığa ait matematiksel modelin denge noktası gösterilmiştir.

**Örnek 3.2.10.** Çocuk hastalıklarından biri olan kızamık hastalığının SEIR modelinde;  $S$ 'nin duyarlı,  $E$ 'nin enfekte,  $I$ 'nin bulaşıcı ve  $R$ 'nin bağışıklık ile iyileşen popülasyonlar olduğu kabul edilsin. SEIR modeli:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \nu - \mu S - \beta SI, \\ \dot{E} &= \beta SI - (\mu + \kappa)E, \\ \dot{I} &= \kappa E - (\mu + \alpha)I, \\ \dot{R} &= \alpha I - \mu R\end{aligned}$$

şeklinde. (Van, 2008)'den alınan bu modelin denge noktası bulunacak olursa (3.2.9) tanımı gereği:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= 0, \\ \dot{E} &= 0, \\ \dot{I} &= 0, \\ \dot{R} &= 0\end{aligned}$$

hesaplanmalıdır. Buradan hastalıksız denge  $E_0 = \left(\frac{\nu}{\mu}, 0, 0, 0\right)$  olarak bulunur. Endemik denge ise  $E_1 = \left(\frac{A_1 A_2}{\kappa \beta}, \frac{\nu \beta \kappa - \mu A_1 A_2}{\beta \kappa A_2}, \frac{\nu \beta \kappa - \mu A_1 A_2}{\beta A_1 A_2}, \frac{\alpha \nu \beta \kappa - \alpha \mu A_1 A_2}{\mu \beta A_1 A_2}\right)$  şeklinde hesaplanır. Burada  $A_1 = \mu + \alpha$  ve  $A_2 = \mu + \kappa$  dır.

### 3.3. Yeni Nesil Matris Yöntemi

Kesirli mertebeden sistemlerin özel bir durumu olan epidemiyolojik bir denklem sisteminin kararlılık analizi temel üreme sayısı kullanılarak da yapılabilir. Kararlılık analizi ile  $R_0$  arasındaki bu ilişki 4. bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir. Bu bölümde ise kararlılık analizi için gerekli olan temel üreme sayısının hesaplanma yöntemlerinden biri olan yeni nesil matris yöntemi ele alınmıştır ve çeşitli örnekler verilmiştir.

$R_0$ 'ı matematiksel olarak hesaplamak için Jacobian yöntemini, hayatta kalma fonksiyonunu, yeni nesil matris yöntemini, endemik dengenin varlığını ve karakteristik polinomun sabit terimini içeren çeşitli yaklaşımlar mevcuttur (Heffernan, 2005; Li, 2011). Bu yaklaşımlardan en yaygın olarak kullanılanı yeni nesil matris yöntemidir (Diekmann, 1990). Yöntemde  $R_0$ , yeni nesil matrisin spektral yarıçapı olarak tanımlanmıştır. Yöntem genel klasik epidemiyolojik modeller için (Castillo, 2002)'deki yaklaşım kullanılarak aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, \mathbf{E}, \mathbf{I}), \\ \frac{d\mathbf{E}}{dt} &= g(x, \mathbf{E}, \mathbf{I}), \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= h(x, \mathbf{E}, \mathbf{I})\end{aligned}\tag{3.13}$$

sistemi oluşturulur. Burada  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^r$ ,  $m, n, r \geq 0$  ve  $h(x, 0, 0) = 0$  dır. Ayrıca  $x$ 'in bileşenleri; duyarlı, iyileşen ve enfekte olmayan birey sayısını temsil eder.  $\mathbf{E}$ 'nin bileşenleri, hastalığı bulaştırmayan enfekte olmuş kişilerin sayısını temsil eder.  $\mathbf{I}$ 'nin bileşenleri, hastalığı bulaştırabilen enfekte bireylerin sayısını temsil eder.  $U_0 = (x^*, 0, 0)$  hastalısız denge noktasını gösterir; yani

$$f(x^*, 0, 0) = g(x^*, 0, 0) = h(x^*, 0, 0) = 0$$

olsun.  $g(x^*, \mathbf{E}, \mathbf{I}) = 0$  denkleminin kapalı olarak bir  $\mathbf{E} = \tilde{g}(x^*, \mathbf{I})$  fonksiyonunu belirlediği varsayalım. Ayrıca  $A = D_{\mathbf{I}}h(x^*, \tilde{g}(x^*, 0), 0)$  olsun ve  $A$  matrisi  $M \geq 0$  (yani  $M_{ij} \geq 0$ ,  $i \neq j$ ) ve  $D > 0$  olacak biçimde bir köşegen matris olmak üzere iki matrisin farkı olarak  $A = M - D$  eşitliği ile yazılabilsin. Bu durumda, temel üreme sayısı  $R_0$ ,  $MD^{-1}$  matrisinin spektral yarıçapı (dominant özdeğer) olarak tanımlanır. Yani,

$$R_0 = \sigma(MD^{-1})\tag{3.14}$$

dir.  $R_0$  ın (3.14) formülü aracılığıyla nasıl hesaplandığını göstermek için aşağıdaki örnek incelenmektedir.



**Örnek 3.3.1.** Aşağıdaki denklem sistemi ile verilen bir SEIR modeli ele alınsın.

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S, \\ \dot{E} = \beta S \frac{I}{N} - (\mu + k)E, \\ \dot{I} = kE - (\gamma + \mu)I, \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (3.15)$$

Burada  $E$ ; belirti göstermeyen bireylerin sayısını,  $k$ ; belirti göstermeyen bir bireyin bulaşıcı hale gelme hızını göstermektedir.  $x$ 'in bileşenleri; duyarlı, iyileşen ve enfekte olmayan birey sayısını temsil ettiğinden  $x = (S, R)$  dir.  $\mathbf{E}$ 'nin bileşenleri, hastalığı bulaştırmayan enfekte olmuş kişilerin sayısını temsil ettiğinden  $\mathbf{E} = E$  dir.  $\mathbf{I}$ 'nin bileşenleri, hastalığı bulaştırabilen enfekte bireylerin sayısını temsil ettiğinden  $\mathbf{I} = I$  dır.

(3.15) sistemi için (3.13)'deki gibi tanımlanan  $f$ ,  $g$ , ve  $h$  fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$f = \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S,$$

$$g = \beta S \frac{I}{N} - (\mu + k)E,$$

$$h = kE - (\gamma + \mu)I.$$

(3.15) sistemi için hastaliksız denge noktası  $U_0 = (x^*, 0, 0, 0)$  olsun.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \Lambda - \beta S^* \frac{I^*}{N} - \mu S^* = 0, \\ \dot{E} &= \beta S^* \frac{I^*}{N} - (\mu + k)E^* = 0, \\ \dot{I} &= kE^* - (\gamma + \mu)I^* = 0, \\ \dot{R} &= \gamma I^* - \mu R^* = 0 \end{aligned}$$

eşitliklerinden  $kE^* - (\gamma + \mu)I^* = 0$  ise  $I^* = 0$  için  $E^* = 0$  olarak elde edilir. Bu da  $h(x^*, E^*, I^*) = h(x^*, 0, 0)$  eşitliğinin sağlandığını göstermektedir.

$\gamma I^* - \mu R^* = 0$  denkleminde  $I^* = 0$  olduğundan  $R^* = 0$  dır.

$\Lambda - \beta S^* \frac{I^*}{N} - \mu S^* = 0$  eşitliğinde  $I^* = 0$  yazıldığında  $S^* = \frac{\Lambda}{\mu}$  olmaktadır. Böylece  $U_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$  ve  $N = S + E + I + R$  olduğundan başlangıçta  $N = S$ 'dir. Yöntemde  $g(x^*, \mathbf{E}, \mathbf{I}) = 0$

denkleminin kapalı olarak bir  $\mathbf{E} = \tilde{g}(x^*, \mathbf{I})$  fonksiyonunu belirlediği varsayılmıştır.  $N = S$  eşitliği,  $g(x^*, \mathbf{E}, \mathbf{I}) = 0$  denkleminde yazıldığında

$$E = \frac{\beta I}{\mu + k} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir. Böylece  $\tilde{g}(x^*, \mathbf{I}) = \frac{\beta I}{\mu + k}$  dir.  $A = D_{\mathbf{I}}h(x^*, \tilde{g}, 0)$  ve  $A = M - D$  idi. (3.16) eşitliği  $h$  fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} h(x^*, \tilde{g}, 0) &= k \frac{\beta I}{\mu + k} - (\gamma + \mu)I \\ &= I \left( k \frac{\beta}{\mu + k} - (\gamma + \mu) \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$M - D = k \frac{\beta}{\mu + k} - (\gamma + \mu)$$

eşitliğinden

$$M = k \frac{\beta}{\mu + k} \quad \text{ve} \quad D = \gamma + \mu$$

dir. Böylece  $R_0 = \sigma(MD^{-1}) = \frac{k\beta}{(\mu + k)(\gamma + \mu)}$  dir.

Temel üreme sayısını hesaplamak için kullanılan yöntemlerden biri olan yeni nesil matris yöntemi Van den Driessche ve Watmough tarafından daha da detaylandırılmıştır (Van, 2002). Bu yaklaşımda temel üretim sayısını hesaplamak için popülasyon, modelin epidemiyolojik yorumu da göz önünde bulundurularak enfekte ve enfekte olmayan şekilde alt popülasyonlara ayrılır. Daha sonra enfekte alt popülasyon olan hesaplama için Jacobian matrisi; iletim matrisi ( $F$ ) ve geçiş matrisi ( $V$ ) olarak iki matrisin toplamı olacak şekilde ayrıştırılır. Bu yöntem (Van, 2008) deki haliyle aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$r$  tane homojen bölüme ayrılmış heterojen bir popülasyon göz önüne alınsın.  $n$  tane enfekte olmuş alt popülasyon ve  $m$  tane enfekte olmayan alt popülasyon olduğu varsayılınsın. Dolayısıyla ele alınan popülasyon için  $r = m + n$  değişkenli bir dinamik model söz konusu olacaktır.  $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$  ve  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$  vektörleri sırasıyla enfekte bölümlerdeki  $m$  değişkenli vektörü ve enfekte olmayan bölmelerdeki  $n$  değişkenli vektörü gösterebilir. Burada

$x_i \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) ve  $y_j \geq 0$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) her bir bölümdeki birey sayısıdır. Bu durumda

- $\mathcal{F}_i(x, y)$ , bölüm  $i$ 'de yeni enfeksiyonların ortaya çıkma oranı,
- $\mathcal{V}_i(x, y)$ , bölüm  $i$  ile diğer enfekte bölümler arasındaki diğer geçişlerin oranı

olmak üzere dinamik model

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \mathcal{F}_i(x, y) - \mathcal{V}_i(x, y) & i = 1, \dots, m, \\ \frac{dy_j}{dt} &= \mathcal{W}_j(x, y) & j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\mathcal{F}_i$  deki geçişler  $y$ 'den  $x$ 'e olup,  $\mathcal{V}_i$  deki geçişler  $x$ 'ten  $y$ 'ye (örneğin iyileşme oranı),  $x$ 'ten  $x$ 'e ya da sistemden ayrılanları (örneğin ölüm oranı) da kapsamaktadır.

(3.17) sisteminde fonksiyonlar aşağıda açıklanan koşulları sağlar:

- Her  $i = 1, \dots, n$  için  $y \geq 0$  ise  $\mathcal{F}_i(0, y) = 0$ ,  $\mathcal{V}_i(0, y) = 0$  dır. Tüm yeni enfeksiyonlar, enfekte olmuş konakçılardan kaynaklanan ikincil enfeksiyonlardır; hastalık bölümlerine bireylerin göçü yoktur.
- Her  $i = 1, \dots, n$  ve negatif olmayan  $x, y$  için  $\mathcal{F}_i(x, y) \geq 0$  dır.  $\mathcal{F}$  fonksiyonu yeni enfeksiyonları temsil eder ve negatif olamaz.
- $x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , olduğunda  $\mathcal{V}_i(x, y) \leq 0$  dır. Her bileşen,  $\mathcal{V}_i$ , bölüm  $i$ 'den net bir çıkışı temsil eder ve bölüm boş olduğunda negatif (yalnızca giriş) olmalıdır.
- Negatif olmayan tüm  $x$  ve  $y$  için  $\sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i(x, y) \geq 0$  dır. Bu toplam, enfekte olmuş tüm bölümlerden toplam çıkışı temsil eder. Modeldeki  $\sum_{i=1}^n x_i$  artışlarına yol açan terimlerin ikincil enfeksiyonları temsil ettiği varsayılır ve bu nedenle  $\mathcal{F}$ 'ye aittir.
- Hastaliksız sistemin  $\frac{dy_j}{dt} = \mathcal{W}_j(0, y)$  asimptotik olarak kararlı benzersiz bir dengeye sahip olduğu varsayılınsın. Yani,  $(0, y)$  formunun başlangıç koşullarına sahip tüm çözümler bir  $(0, y^*)$  noktasına  $t \rightarrow \infty$  olarak yaklaşır. Bu noktaya hastaliksız denge denilmektedir.

**Lemma 3.3.2.**  $x^*$ , (3.17) sisteminin bir hastaliksız denge noktasıysa ve (3.17) sisteminde fonksiyonlar yukarıdaki a1 - a5 koşullarını sağlıyorsa Jacobian matrisi  $D\mathcal{F}(x^*) - D\mathcal{V}(x^*)$  olacak

şekilde ayrıştır:

$$D\mathcal{F}(x^*) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x^*) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}.$$

Burada  $F = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i(x^*)}{\partial x_j} \right]$  ve  $V = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i(x^*)}{\partial x_j} \right]$  şeklinde tanımlanır.  $F$  ve  $V$ 'nin biyolojik anlamlarından,  $F$ 'nin giriş açısından negatif olmadığı ve  $V$ 'nin tekil olmayan bir  $M$  matrisi olduğu sonucu çıkar (Berman, 1994) dolayısıyla  $V^{-1}$  giriş açısından negatif değildir.

Yeni nesil matrisi iletim ve geçiş matrisleri kullanılarak  $FV^{-1}$  olarak tanımlanır.  $FV^{-1}$  matrisinin girdileri  $(i, k)$  olarak düşünülürse anlamlı bir  $R_0$  tanımı geliştirmek için bu girdiler aşağıdaki gibi yorumlanabilir:

- $V^{-1}$ 'in  $(j, k)$  girdisi, hastalısız dengenin yakınında kaldığı ve yeniden enfeksiyon olmadığı varsayıldığında bu bireyin ömrü boyunca  $j$  bölümünde geçirdiği ortalama süredir.
- $F$  nin  $(i, j)$  girdisi,  $j$  bölümündeki enfekte olmuş bireylerin  $i$  bölümünde yeni enfeksiyonlar üretme hızıdır.

Dolayısıyla  $FV^{-1}$  matrisinin girdisi başlangıçta hastalısız bir popülasyonun  $k$  bölümüne giren enfekte birey tarafından  $i$  bölümünde üretilen beklenen yeni enfeksiyon sayısıdır.

Sonuç olarak yeniden detaylandırılan bu yaklaşımda temel üreme sayısı ( $R_0$ ) yeni nesil matrisinin dominant özdeğerleri veya spektral yarıçapı olarak tanımlanır.

Yani;  $R_0 = \sigma(FV^{-1})$  dır.

Ayrıca yeni nesil matrisin başlangıçta konakçı popülasyonda enfekte birey olmadığı durumlarda uygulandığına dikkat edilmelidir.

Bu yaklaşımı daha iyi kavrayabilmek için aşağıdaki örnekler incelenmiştir.

**Örnek 3.3.3.** Bulaşıcı hastalık modeli, negatif olmayan başlangıç koşullarıyla birlikte aşağıdaki diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır.

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \beta_1 SI/N + \beta_2 TI/N - (d + v + r_1)E + pr_2 I, \\ \dot{I} &= vE - (d + r_2)I, \\ \dot{S} &= b(N) - dS - \beta_1 SI/N, \\ \dot{T} &= -dT + r_1 E + qr_2 I - \beta_2 TI/N\end{aligned}$$

Burada  $S$  duyarlı bireyler,  $E$  maruz kalan bireyler,  $I$  enfekte bireyler,  $T$  tedavi edilen bireylerdir.

$E$ 'den  $I$ 'ya ilerleme ve tedavinin başarısızlığı yeni enfeksiyonlar olarak değil, enfekte bir bireyin çeşitli bölmeler yoluyla ilerlemesi olarak kabul edilir. Buradan  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{V}$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta_1 SI/N + \beta_2 TI/N \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (d + v + r_1)E - pr_2 I \\ -vE + (d + r_2)I \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Enfekte bölmeler  $E$  ve  $I$ 'dir.  $E = I = 0$  olan bir denge çözümü  $x = (0, 0, S_0, 0)^\top$  biçimindedir, burada  $S_0$ ,  $bS_0 = dS_0$ 'ın herhangi bir pozitif çözümüdür. Bu, ancak ve ancak  $b'(S_0) < d$  ise hastalıksız bir denge olacaktır. Genelliği kaybetmeden,  $S_0 = 1$ 'in hastalıksız bir denge olduğunu varsayalım. O halde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} d + v + r_1 & -pr_2 \\ -v & d + r_2 \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \frac{1}{(d + v + r_1)(d + r_2) - vpr_2} \begin{pmatrix} d + r_2 & pr_2 \\ v & d + v + r_1 \end{pmatrix}$$

olmaktadır.  $R_0 = \sigma(FV^{-1})$  den

$$R_0 = \frac{\beta_1 v}{((d + v + r_1)(d + r_2) - vpr_2)}$$

olarak hesaplanır.

**Örnek 3.3.4.** Aşağıdaki COVID-19'un bulaşmasını tanımlayan diferansiyel denklemler ele

alınsın.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\mu SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \mu SI - (\beta + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I, \\ \frac{dD}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

Burada  $S$  duyarlı bireyler,  $I$  enfekte oluş bireyler,  $R$  iyileşen bireyler,  $D$  ölen bireyler,  $N$  toplam nüfus,  $\mu$  duyarlılardan bulaşıcı bireylere bulaşma oranı,  $\beta$  enfeksiyondan kurtulma oranı,  $\gamma$  hastalık kaynaklı ölüm oranıdır.

$x$  enfekte bölümlerdeki vektörü,  $y$  enfekte olmayan bölümlerdeki vektörü temsil ettiğinden  $x = (I)$ ,  $y = (S, R, D)$  olarak belirlenmektedir. Dinamik modelden yeni enfeksiyon oranı  $\mathcal{F} = \mu SI$  ve diğer enfekte bölümler arasındaki geçişler  $\mathcal{V} = (\beta + \gamma)I$  olarak yazılır.  $I$  ya göre kısmi türev uygulandığında

$$F = \mu S \quad \text{ve} \quad V = \beta + \gamma$$

olur.  $R_0 = \sigma(FV^{-1})$ ' den  $R_0 = \frac{\mu S}{\beta + \gamma}$  olarak hesaplanır.

**Örnek 3.3.5.** Aşağıda ele alınan

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_S}{dt} &= -\beta\rho_S\rho_I + \omega\rho_R, \\ \frac{d\rho_E}{dt} &= \beta\rho_S\rho_I - \nu\rho_E, \\ \frac{d\rho_I}{dt} &= \nu\rho_E - \sigma\rho_I, \\ \frac{d\rho_R}{dt} &= \sigma\rho_I - \omega\rho_R\end{aligned}$$

SERIRS modelinde  $\rho_S$ ,  $\rho_E$ ,  $\rho_I$ ,  $\rho_R$  sırasıyla duyarlı, maruz kalan, enfekte ve iyileşmiş bireylerin fraksiyonlarını gösterir. Ayrıca  $\omega$  doğal bağışıklık kaybı oranını,  $\nu$  bulaşıcıya geçiş oranını,  $\beta > 0$  enfeksiyon hızının birim zamanını,  $\sigma > 0$  iyileşme hızının birim zamanını göstermektedir.

$(\rho_E, \rho_I)$ 'yi enfekte sınıfın nüfus yoğunluğu olarak kabul edilmektedir. Dolayısıyla, bu

sistem için aşağıdaki gibi  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{V}$  vektörleri bulunmaktadır:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta \rho_S \rho_I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} v \rho_E \\ v \rho_E + \sigma \rho_I \end{pmatrix}.$$

Hastaliksız denge noktası  $(\rho_S, \rho_E, \rho_I) = (1, 0, 0)$  şeklinde;  $F$  ve  $V$  matrisleri

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v & 0 \\ -v & \sigma \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/v & 0 \\ 1/\sigma & 1/\sigma \end{pmatrix}$$

olduğundan temel üreme sayısı  $FV^{-1}$  den

$$R_0 = \frac{\beta}{\sigma}$$

olarak hesaplanır.

**Örnek 3.3.6.** Aşağıdaki gibi bir SEIR modeli ele alınsın;

$$\dot{S} = -\beta SI + \lambda - \mu S,$$

$$\dot{E} = \beta SI - (\mu + k)E,$$

$$\dot{I} = kE - (\lambda + \mu)I,$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R.$$

Burada  $S$  duyarlı bireyler,  $E$  maruz kalmış bireyler,  $I$  enfekte bireyler,  $R$  iyileşmiş bireyleri ifade etmektedir. Ayrıca burada  $\beta$  etkin temas oranı,  $\lambda$  duyarlı kişilerin “doğum” oranı,  $\mu$  ölüm oranı,  $k$  maruziyetten (gizli) enfekte olmaya ilerleme hızı,  $\gamma$  uzaklaştırma hızıdır.

Modelde yalnızca iki enfeksiyon sınıfı  $E$  ve  $I$  vardır. Böylece bu sistem için  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{V}$

vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\mu + k)E \\ -kE + (\gamma + \mu)I \end{pmatrix}.$$

Hastaliksız denge noktası  $(S^*, E^*, I^*, R^*) = (\lambda/\mu, 0, 0, 0)$  dır.  $F$  matrisi, enfeksiyon sınıflarındaki değişikliklere göre yeni enfeksiyon oranınının kısmi türevlerini toplar;  $V$  matrisi, iki enfeksiyon durumu arasında hareket etmenin çeşitli yollarınının kısmi türevlerini toplar. Böylece  $F$  ve  $V$  matrisleri

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta\lambda/\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \mu + k & 0 \\ -k & \gamma + \mu \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\mu + k)} & 0 \\ \frac{k}{(\mu + k)(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \mu} \end{pmatrix}$$

olmaktadır.  $R_0$ ,  $FV^{-1}$  matrisinin dominant özdeğeri olduğundan öncelikle

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\lambda k}{\mu(\mu + k)(\gamma + \mu)} & \frac{\beta\lambda}{\mu(\gamma + \mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece

$$R_0 = \frac{\beta\lambda k}{\mu(\mu + k)(\gamma + \mu)}$$

olarak bulunur.



#### 4. KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREVİN BİR UYGULAMASI

Kesirli mertebeden sistemlerin kararlılık analizi bir önceki bölümde teorik olarak verilmişti. Üçüncü bölümde yer alan yöntemlerin uygulamasına ait bir örnek olarak bu bölümde, Türkiye’de gözlemlenen veriler kullanılarak kesirli mertebeye SEIRD matematiksel modeli sunulmuş ve kararlılık analizi söz konusu yöntemler kullanılarak yapılmıştır.

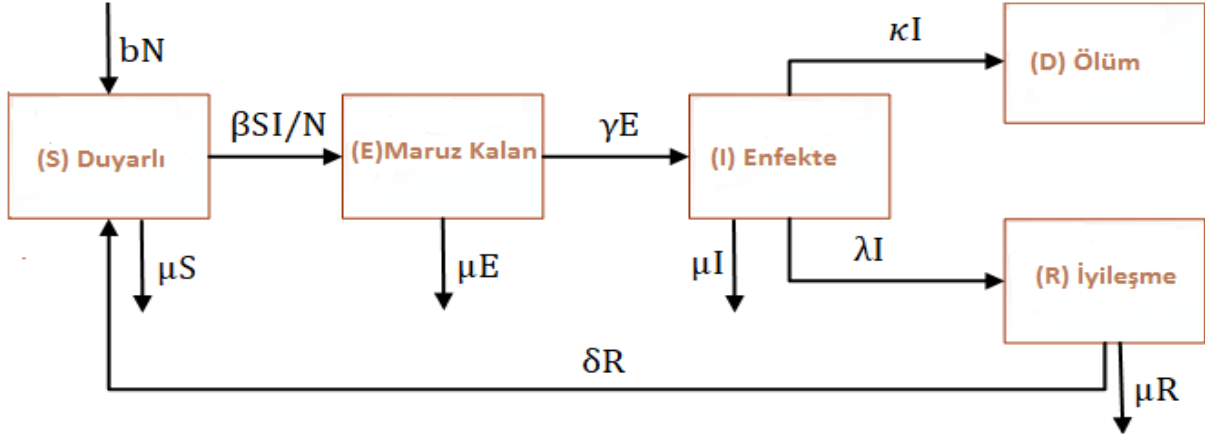
Matematiksel modeller, çeşitli alanlardaki soruları desteklemek için matematiksel epidemiyologlar tarafından kullanılmaktadır. Genel olarak epidemiyolojide kullanılan modellerin türü ve biçimi, salgının evresine bağlıdır. Bir salgından önce, kritik boşlukları planlamak, belirlemek için modeller kullanılır ve bir pandemi durumunda tespit etmek, yanıt vermek için planlar hazırlanır. Pandemi yavaşlamaya başladıktan sonra modellemeciler pandeminin neden olduğu uzun vadeli etkilerle ilgili modeller geliştirmekle ilgilenmektedirler. Geçmiş yıllarda salgın hastalıkların gelişim evresini ve yayılma hızını araştırmak için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu konudaki ilk çalışma (Frank, 1972) tarafından hastalıkların doğal tarihi üzerine yapılmış ve bu çalışmaların sonunda bir kitap yazılmıştır. Dünyanın her yerindeki insanların karşı karşıya olduğu bulaşıcı hastalıklar; HIV(insan bağışıklık yetmezliği virüsü), COVID-19, SARS (şiddetli akut solunum yolu sendromu), sıtma, grip, tüberküloz, çiçek hastalığı, kızamık, sarı humma, kolera vb. gibi hastalıklardır. Bu bölümde bu hastalıklardan biri olan COVID-19 hastalığına ait kesirli mertebeden bir matematiksel model kesirli mertebeden sistemlerin kararlılık analizine dair bir uygulama olarak incelenmiştir.

##### 4.1. Matematiksel Modelin Oluşturulması

COVID-19 pandemisi veya koronavirüs pandemisi 1 Aralık 2019’da Çin’in Wuhan kentinde ortaya çıktı. Bu hastalıkta en sık görülen semptomlar ateş, öksürük, nefes darlığı ve anozmidir. Ağır vakalarda zatürre, ağır solunum yetmezliği, böbrek yetmezliği ve ölüm gelişebilir. Bu salgın ilk olarak Wuhan’daki deniz ürünleri ve hayvan pazarında tespit edildi. Sonra insandan insana yayılmaya başladı. Hastalık, hasta kişilerin öksürmesi ve hapşırması ile yayılan damlacıkların solunması ile bulaşır. Önleyici tedbirler arasında fiziksel veya sosyal mesafe, karantina, kapalı havalandırma, öksürürken ve hapşırırken ağzın ve burnun kapatılması, ellerin yıkanması ve yıkanmamış ellerin yüzden uzak tutulması yer alır. WHO (Dünya Sağlık Örgütü) (WHO, 31 Aralık 2019), hastalığın bulaşma riskinin yüksek olduğu ve sosyal mesafeyi korumanın zor olduğu bölgelerde yüz maskelerinin kullanılmasını önermektedir. Eylül 2021 tarihi

itibarıyla yaklaşık 4 milyon ölüm vakası ile yaklaşık 219 milyondan fazla kişi etkilenmiştir.

SEIRD modelinde, varsayılan bir sabit popülasyon, hastalık durumlarına göre beş ayrı alt popülasyona bölünür.  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  ve  $D(t)$  durumları sırasıyla  $t$  anındaki duyarlı, maruz kalan, enfekte olan, iyileşmiş ve ölen bireylere karşılık gelir. Nüfusun tüm alt popülasyonları arasındaki ilişkiler Şekil 4.1’de gösterilmektedir.



Şekil 4.1. Önerilen SEIRD modelinin şematik diyagramı

Şekil 4.1’de gösterilen oranlar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

- $b$ : Nüfusun doğum oranı,
- $\mu$ : Normal yoldan ölüm oranı,
- $\beta$ : Enfekte olan her bireyin temas sayısı (Enfeksiyon oranı),
- $\gamma$ : Hastalığa maruz kalanların semptomatik hale gelme hızı (Kuluçka oranı),
- $\kappa$ : Hastalıktan ölenlerin oranı,
- $\lambda$ : Birim zamanda iyileşen kişi sayısı (1/Hastalık süresi),
- $\delta$ : Hastalığı atlatan bireylerin hastalığa karşı bağışıklığını kaybetme oranı (1/ortalama nüks süresi).

Şekil 4.1’deki diyagramla ilgili dinamik diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \dot{S} = bN - \beta \frac{SI}{N} + \delta R - \mu S, \\ \dot{E} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma E - \mu E, \\ \dot{I} = \gamma E - \kappa I - \lambda I - \mu I, \\ \dot{R} = \lambda I - \delta R - \mu R, \\ \dot{D} = \kappa I \end{cases} \quad (4.1)$$

burada  $N$ , çalışılan bölgedeki toplam nüfusu temsil eder, yani  $N = S + E + I + R + D$  dir. (4.1) ile verilen sisteme

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}, d = \frac{D}{N} \quad (4.2)$$

dönüşümü yapılırsa sistem boyutsuzlaştırılır ve böylece sistem popülasyon değerinden bağımsız hale gelir. Buradan kesirli türev uygulanarak elde edilen nCOVID-19 dinamikleri için kesirli mertebeden bulaşma modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} D^\nu s = b - \beta is + \delta r - \mu s, \\ D^\nu e = \beta is - \gamma e - \mu e, \\ D^\nu i = \gamma e - \kappa i - \lambda i - \mu i, \\ D^\nu r = \lambda i - \delta r - \mu r, \\ D^\nu d = \kappa i. \end{cases} \quad (4.3)$$

Burada  $\nu$  parametresi; (4.3) epidemik modelindeki hafıza etkilerini tanımlayan  $0 \leq \nu \leq 1$  olmak üzere kesirli mertebeden türevi temsil etmektedir. Sistem (4.3)'teki kesirli modelin çözümü için MATLAB içinde Adams-Bashforth-Moulton yöntemi kullanılmıştır (Diethelm, 2002).

D ile verilen değişkenin Şekil 4.1'deki kapalı döngünün dışında kaldığı açıkça görülebilmektedir. Ayrıca, (4.3)'te verilen denklem sisteminde "d" değişkeninin diğer değişkenler üzerinde herhangi bir etkisinin olmadığı aşıkardır. Bu yüzden, bundan sonra kritik noktaların bulunmasında ve kararlılık analizinde beşinci denklem dikkate alınmayacaktır.

## 4.2. Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

$0 < \nu \leq 1$  eşitsizliğini sağlayan  $\nu$ . mertebeden (4.3) denklem sistemi ele alınsın. (4.3) sisteminin denge noktaları (4.3) sisteminin sağ tarafında yer alan eşitlikler sıfıra eşitlenerek; yani

$$\begin{cases} D^\nu s = 0, \\ D^\nu e = 0, \\ D^\nu i = 0, \\ D^\nu r = 0, \\ D^\nu d = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

olarak ayarlanarak bulunabilir. İki denge noktası vardır:

- hastalısız denge, hastalığın yayılmadığında olan denge,
- tek endemik denge.

(4.4) sistemindeki eşitlikler çözümlenerek hastalısız denge

$$E_0 = (s^*, e^*, i^*, r^*) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0, 0\right) \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Burada  $b, \mu$  sabit parametrelerdir. Başlangıçta popülasyonda virüs olmadığından aktif vaka (enfekte kişi) sayısı sıfırdır ( $i(0) = 0$ ). Başlangıçta popülasyon sayısının sabit olduğu varsayıldığında, sistemdeki bölmelerin oranları toplamı 1'e eşit olmalıdır,  $\{s(0) + e(0) + i(0) + r(0) + d(0) = 1\}$ , ve sistemin sağ tarafının toplamı sıfıra eşit olmalıdır,  $\{\dot{s} + \dot{e} + \dot{i} + \dot{r} + \dot{d} = 0\}$ . Dolayısıyla  $e^* = i^* = r^* = d^* = 0$  olması nedeniyle  $s^* = b/\mu = 1$  elde edilir.

Hastalısız denge dışında, (4.4) sistemindeki ilk dört eşitliği  $s^* \neq 0, e^* \neq 0, i^* \neq 0, r^* \neq 0$  koşulları altında çözümlenerek  $E_1 = (s^*, e^*, i^*, r^*)$  endemik dengesi aşağıdaki gibi bulunabilir:

Sistem (4.3)'ten

$$\begin{cases} \lambda i^* - (\delta + \mu)r^* = 0, \\ r^* = \frac{\lambda i^*}{\delta + \mu} = \frac{\lambda}{A_3} \frac{c_1 A_3}{c_2 \beta} = \frac{c_1 \lambda}{c_2 \beta}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma e^* - (\kappa + \lambda + \mu)i^* = 0, \\ e^* = \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu}{\gamma}\right)i^* = \frac{A_2}{\gamma} \frac{c_1 A_3}{c_2 \beta}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta s^* i^* - \gamma e^* - \mu e^* = 0, \\ s^* = \left(\frac{\lambda + \mu}{\beta}\right) \frac{e^*}{i^*} = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu}{\gamma}\right) = \frac{A_1 A_2}{\beta \gamma}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - \beta s^* i^* + \delta r^* - \mu s^* = 0, \\ i^* = -\frac{\mu s^* - \delta r^* - b}{\beta s^*} = \frac{b - \mu \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu}{\gamma}\right) + \delta \left(\frac{\lambda}{\delta + \mu}\right) i^*}{\beta \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu}{\gamma}\right)} \\ = \frac{b - \mu \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu}{\gamma}\right) - \delta \left(\frac{\lambda}{\delta + \mu}\right)} = \frac{\gamma b - \mu \frac{A_1 A_2}{\beta}}{\frac{A_1 A_2 A_3 - \delta \lambda \gamma}{A_3}} \\ = \frac{(\gamma \beta b - \mu A_1 A_2) A_3}{(A_1 A_2 A_3 - \delta \lambda \gamma) \beta} = \frac{c_1 A_3}{c_2 \beta}, \end{cases}$$

ifadeleri elde edilir. Burada

$$\gamma + \mu = A_1, \quad \kappa + \lambda + \mu = A_2, \quad \delta + \mu = A_3 \quad (4.6)$$

ve

$$\gamma \beta b - \mu A_1 A_2 = c_1, \quad A_1 A_2 A_3 - \delta \lambda \gamma = c_2 \quad (4.7)$$

dır. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri yerlerine yazıldığında endemik denge noktası

$$E_1 = \left( \frac{A_1 A_2}{\beta \gamma}, \frac{A_2 A_3 c_1}{\beta \gamma c_2}, \frac{A_3 c_1}{\beta c_2}, \frac{c_1 \lambda}{c_2 \beta} \right) \quad (4.8)$$

şeklinde bulunmaktadır.

Dinamik sistem (4.3), salgın hastalıkların davranışını temsil etmek için en az bir kararlı duruma sahip olmalıdır. Pozitif denge noktalarının yerel olarak kararlı olup olmadığını elde etmek için, denge noktalarındaki Jacobian matrisinin özdeğerlerini hesaplamak gerekir. (4.3) sisteminin Jacobian matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta i - \mu & 0 & -\beta s & \delta \\ \beta i & -\gamma - \mu & \beta s & 0 \\ 0 & \gamma & -(\kappa + \lambda + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -(\delta + \mu) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

(4.9) matrisinin özdeğerleri,  $\det(J - zI_4) = 0$  karakteristik polinomu çözülerek hesaplanır. Buradan  $I_4$ ,  $4 \times 4$  boyutlu birim matris olmak üzere

$$P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0, \quad (4.10)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \\ a_2 &= A_1 A_4 + A_2 A_3 + (A_1 + A_4)(A_2 + A_3) - \gamma \beta s^*, \\ a_3 &= A_1 A_4 (A_2 + A_3) + A_2 A_3 (A_1 + A_4) - (A_3 + \mu) \gamma \beta s^*, \\ a_4 &= A_1 A_2 A_3 A_4 - A_3 \mu \gamma \beta s^* - \beta i^* \gamma \lambda \delta, \\ A_4 &= \beta i^* + \mu \end{aligned}$$

dir. (4.3) doğrusal olmayan sisteminin kararlı durumları yerel olarak asimptotik olarak kararlıdır ancak ve ancak (4.10)'daki  $P(z)$  polinomunun tüm kökleri negatif reel kısımlara sahiptir. Aksi takdirde, sistemin kararlı durumları kararsızdır.

Van den Driessche ve Watmough tarafından geliştirilen yeni nesil operatörü yöntemini kullanarak (4.3) sisteminin temel üreme sayısı,  $R_0$ ,  $FV^{-1}$ 'nin dominant özdeğeridir. (4.3) modelinde enfekte sınıfı  $e$  ve  $i$  dir. Böylece dinamik modelden  $\mathcal{F}$  ve  $\mathcal{V}$  vektörleri

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta i s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \gamma e + \mu e \\ -\gamma e + (\kappa + \lambda + \mu) i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılmaktadır.  $e$  ve  $i'$  ye göre kısmi türev uygulandığında

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$V = \begin{pmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ -\gamma & \kappa + \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla yeni nesil matrisi

$$V^{-1} = \frac{1}{(\kappa + \lambda + \mu)(\gamma + \mu)} \begin{pmatrix} \kappa + \lambda + \mu & 0 \\ \gamma & \gamma + \mu \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$K = FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta \gamma s}{(\kappa + \lambda + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{\beta s}{(\kappa + \lambda + \mu)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, yeni nesil matrisinin dominant özdeğerinden elde edilen  $R_0$  temel üreme sayısı

$$R_0 = \sqrt{\frac{\beta \gamma b}{\mu(\gamma + \mu)(\kappa + \lambda + \mu)}} = \sqrt{\frac{\beta \gamma b}{\mu A_1 A_2}}$$

olarak elde edilir.

### 4.3. Denge Noktalarının Kararlılığı

(4.2) kısmında da bulunduğu gibi genel olarak da epidemiyolojik modellemede iki denge noktasının varlığı elde edilir; hastalısız denge ve endemik dengedir. Hastalısız denge popülasyondaki enfekte bireylerin yokluğundaki denge çözümüdür, diğer yandan endemik denge ise enfekte bireylerin varlığındaki denge çözümüdür. Kararlı durumların yerel kararlılık analizleri  $E_0$  hastalısız denge noktasında ve  $E_1$  endemik denge noktasında ayrı ayrı incelenir.

$R_0 < 1$  eşitsizliği sağlandığında dinamik bir sistemin herhangi bir pozitif endemik kararlı durum noktasına sahip olamayacağı açıktır. Ancak, denge noktalarında  $E$  ve  $I$  durumları

için negatif değerlere sahip olmanın biyolojik bir anlamı olmadığı bilinmektedir. Bu nedenle endemik denge noktasının pozitifliğini ve varlığını garanti etmek için  $R_0 > 1$  olması gerekir. Aksi durumda sistem her zaman hastalısız dengeye dönüşür. Ayrıca  $R_0 > 1$  ise tek bir endemik denge noktası vardır.  $E_0$  denge noktasının kararlı durumunun varlığı, yerel kararlılık koşullarını sağlayan Routh-Hurwitz kriteri kullanılarak da elde edilebilir. Dördüncü dereceden Routh-Hurwitz kriterine göre yerel kararlılık için;

$$a_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

için

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &> 0, \\ (a_1 a_2 - a_3) a_3 &> a_1^2 a_4 \end{aligned}$$

koşullarının sağlanması gerekir. Aksi takdirde, sistemin kararlı durumu kararsızdır. (4.3) sisteminin (4.5)  $E_0$  denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \frac{-\beta b}{\mu} & \delta \\ 0 & -\gamma - \mu & \frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ 0 & \gamma & -(\kappa + \lambda + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -(\delta + \mu) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.  $E_0$  denge noktasındaki Jacobian matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} \det(J_{E_0} - zI_4) &= (-\mu - z) \begin{vmatrix} -\gamma - \mu - z & \frac{\beta b}{\mu} & 0 \\ \gamma & -(\kappa + \lambda + \mu + z) & 0 \\ 0 & \lambda & -(\delta + \mu + z) \end{vmatrix} = 0 \\ &= (-\mu - z)(-\delta - \mu - z) [(\delta + \mu + z)(\kappa + \lambda + \mu + z) - \frac{\gamma \beta b}{\mu}] = 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.  $P_{E_0}(z)$  karakteristik polinomu,

$$P_{E_0}(z) = (\mu + z)(A_3 + z)P_{E_0}^*(z) \quad (4.11)$$



dir. Burada

$$P_{E_0}^*(z) = [z^2 + (A_1 + A_2)z + A_1A_2 - \gamma\beta b/\mu = 0] \quad (4.12)$$

şeklindedir. (4.11) denklemindeki  $P_{E_0}(z)$  polinomunun ilk iki kökü negatif reel kökler olan  $z_1 = -\mu < 0$  ve  $z_2 = A_3 < 0$  olarak kolaylıkla elde edilebilir.  $E_0$  denge noktasında dinamik sistem (4.3)'ün kararlılığını analiz etmek için ikinci dereceden Routh-Hurwitz kararlılık kriterini kullanarak  $P_{E_0}^*(z)$ 'nin kararlılığına odaklanmak gerekir.

**Teorem 4.3.1.** Doğrusal olmayan (4.3) dinamik sisteminin  $E_0$  daki hastalısız dengesinin yerel asimptotik kararlı olması için yeter koşul (4.12) eşitliğindeki  $P_{E_0}^*(z)$  polinomunun tüm köklerinin negatif reel kısımlara sahip olmasıdır. Yani

$$A_1A_2 - \gamma\beta b/\mu > 0 \quad \text{ya da} \quad R_0 < 1$$

koşulunun sağlanmasıdır. Aksi takdirde sistemin hastalısız dengesi kararsızdır.

**İspat.** Descartes'ın işaret kuralına göre,  $P_{E_0}^*(z)$  polinomu negatif reel kısımlara sahip olması için  $A_1 + A_2 > 0$  ve  $A_1A_2 - \gamma\beta b/\mu > 0$  koşulları sağlanmalıdır. Tüm parametrelerin pozitif olması nedeniyle  $A_1 + A_2 > 0$  olduğu açıktır. Bu nedenle, sistemin hastalısız dengesinin yerel kararlılığı sadece  $A_1A_2 - \gamma\beta b/\mu > 0$  koşuluna bağlıdır. Bu eşitsizlik  $R_0 < 1$  ve  $c_1 < 0$  koşulunu sağlar. O zaman tüm özdeğerler negatif olacaktır. Böylece (4.5) hastalısız denge noktası yerel olarak kararlıdır. ■

Endemik dengenin kararlılığı hastalısız dengenin kararlılığından çok daha önemlidir, çünkü pandeminin ne kadar süreceği hakkında bir tahminde bulunulmasına olanak verir.  $E_1$  denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\frac{A_3c_1}{c_2} - \mu & 0 & \frac{-A_1A_2}{\gamma} & \delta \\ \frac{A_3c_1}{c_2} & -A_1 & \frac{A_1A_2}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -A_3 \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin determinanti

$$\det(J_{E_1} - zI_4) = \begin{vmatrix} -\frac{A_3c_1}{c_2} - \mu - z & 0 & \frac{-A_1A_2}{\gamma} & \delta \\ \frac{A_3c_1}{c_2} & -A_1 - z & \frac{A_1A_2}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma & -A_2 - z & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -A_3 - z \end{vmatrix}$$

şeklinde. Endemik dengenin kararlılığını görebilmek için Routh-Hurwitz kriterleri kullanılabilir ancak burada determinant hesaplaması için gerekli işlemler oldukça karışık olduğundan (4.3) sistemin  $E_1$ 'deki kararlılığı temel üreme sayısı kullanılarak aşağıdaki teorem yardımıyla incelenecektir.

**Teorem 4.3.2.** 4.8'deki gibi pozitif bir  $E_1$  endemik denge varsa ve  $R_0 > 1$  eşitsizliği sağlanıyorsa, bu denge noktası doğrusal olmayan dinamik sistem için global olarak asimptotik kararlıdır.

**İspat.** Biyolojik anlamı sebebiyle (4.3) sisteminin sadece pozitif kararlı durumlarına odaklanmak mümkündür. Bu nedenle, (4.8) denge noktasındaki tüm değişkenler pozitif olmalı.  $E_1$  de pozitif bir endemik denge var olduğu varsayalım.  $c_2$ 'nin pozitif olduğu açıktır.  $E_1$ 'deki değişkenlerin pozitif olma koşulunu sağlamak için  $c_1$  pozitif olmalıdır, çünkü diğer tüm parametreler pozitiftir.  $R_0 > 0$  için  $c_1 > 0$  dır. Bu da  $E_1$ 'de  $R_0 > 1$  sağlanıyor ise tek bir endemik denge var olması anlamına gelmektedir.  $E_1$  endemik dengesinin global olarak asimptotik kararlılıkları, Lyapunov kararlılık teorisi ile analiz edilebilir. Bir  $V$  Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$V = s - s^* \ln s + B(e - e^* \ln e) + F(i - i^* \ln i) + G(r - r^* \ln r).$$

$V$ 'nin türevi

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{s} \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) + B\dot{e} \left(1 - \frac{e^*}{e}\right) + F\dot{i} \left(1 - \frac{i^*}{i}\right) + G\dot{r} \left(1 - \frac{r^*}{r}\right) \\ &= (b - \mu s - \beta is + \delta r) \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) + B(\beta is - \gamma e - \mu e) \left(1 - \frac{e^*}{e}\right) \\ &\quad + F(\gamma e - \kappa i - \lambda i - \mu i) \left(1 - \frac{i^*}{i}\right) + G(\lambda i - \delta r - \mu r) \left(1 - \frac{r^*}{r}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada  $b$ ,  $\gamma + \mu$ ,  $\kappa + \lambda + \mu$ ,  $\delta + \mu$  parametreleri (4.3) dinamik sistemin

kararlı durumunda,

$$b = \mu s^* + \beta i^* s^* - \delta r^*, \quad \gamma + \mu = \frac{\beta i^* s^*}{e^*}, \quad \kappa + \lambda + \mu = \frac{\gamma e^*}{i^*}, \quad \delta + \mu = \frac{\lambda i^*}{r^*}$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu ise

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\mu s^* + \beta i^* s^* - \delta r^* - \mu s - \beta i s + \delta r) \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) + B \left(\beta i s - \frac{\beta i^* s^*}{e^*} e\right) \left(1 - \frac{e^*}{e}\right) \\ & + F \left(\gamma e - \frac{\gamma e^*}{i^*} i\right) \left(1 - \frac{i^*}{i}\right) + G \left(\lambda i - \frac{\lambda i^*}{r^*} r\right) \left(1 - \frac{r^*}{r}\right) \end{aligned}$$

sonucunu verir. Burada

$$\frac{s}{s^*} = x, \quad \frac{e}{e^*} = y, \quad \frac{i}{i^*} = z, \quad \frac{r}{r^*} = w \quad (4.13)$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulsun. Bu değişkenlerin biyolojik anlamı dikkate alınarak  $s$ 'nin 1'den azalıp 0 ile 1 arasında olan  $s^*$ 'ye, diğerlerinin 0'dan artarak sırasıyla  $e^*$ ,  $i^*$  ve  $r^*$  'ye ulaşması nedeniyle  $x \geq 1$  ve  $y, z, w \leq 1$  yazılabilir. (4.13) dönüşümünden sonra;

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\mu s^* + \beta i^* s^* - \delta r^* - \mu s^* x - \beta s^* i^* x z + \delta r^* w) + B \left(1 - \frac{1}{y}\right) (\beta s^* i^* x z - \beta s^* i^* y) \\ & + F \left(1 - \frac{1}{z}\right) (\gamma e^* y - \gamma e^* z) + G \left(1 - \frac{1}{w}\right) (\lambda i^* z - \lambda i^* w) \\ = & -\frac{(x-1)^2}{x} \mu s^* + \beta s^* i^* \left(\frac{(1-x)(xz-1)}{x}\right) + B \beta s^* i^* \left(\frac{(y-1)(xz-y)}{y}\right) \\ & + \delta r^* \left(\frac{(x-1)(w-1)}{x}\right) + F \gamma e^* \left(\frac{(y-z)(z-1)}{z}\right) + G \lambda i^* \left(\frac{(z-w)(w-1)}{w}\right) \end{aligned}$$

dır.  $\frac{(x-1)^2}{x}$  değişkeninin katsayısının negatif olduğu açıktır. Parametrelerin katsayılarının  $\beta i^* s^*$ ,  $B \beta i^* s^*$ ,  $\delta r^*$ ,  $F \gamma e^*$  ve  $G \lambda i^*$  pozitif olma olasılığı ve bu durumun  $\dot{V}$ 'nin pozitif çözümüne neden olma olasılığı vardır. Bu sorunu çözmek için, içlerindeki değişkenlerin sıfırdan küçük veya sıfıra

eşit olduğu kabul edilebilir. Böylece;

$$\left(\frac{(1-x)(xz-1)}{x}\right) \leq 0, \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{(y-1)(xz-y)}{y}\right) \leq 0, \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{(x-1)(w-1)}{x}\right) \leq 0, \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{(y-z)(z-1)}{z}\right) \leq 0, \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{(z-w)(w-1)}{w}\right) \leq 0 \quad (4.18)$$

dir.

- $x \geq 1$  olması nedeniyle (4.14) eşitsizliğinden  $xz \geq 1$  bulunur.
- $y \leq 1$  olması nedeniyle (4.15) eşitsizliğinden  $xz \geq y$  bulunur.
- $x \geq 1$  ve  $w \leq 1$  olması nedeniyle (4.16) eşitsizliği 0'dan küçük veya 0'a eşittir.
- $z \leq 1$  olması nedeniyle (4.17) eşitsizliğinden  $y \geq z$  bulunur.
- $w \leq 1$  olması nedeniyle (4.18) eşitsizliğinden  $z \geq w$  bulunur.

Sonuç olarak  $x \geq 1 \geq y \geq z \geq w$ 'dur ve  $x = 1$  ise  $y = z = 1$ 'dir. Böylece La Salle değişmezlik prensibine ( LaSalle, 1976; Huo, 2016) göre (4.3) sisteminin endemik dengesi  $R_0 > 1$  olması nedeniyle global olarak asimptotik kararlıdır. ■

#### 4.4. Hastalısız Dengenin Global Kararlılığı

Bu kısımda (4.3) sisteminin  $E_0$  hastalısız dengesinin global kararlılığı (Chavez, 2002)'da yer alan yöntem kullanılarak incelenmiştir. Söz konusu yöntem kısaca aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, \mathbf{E}, \mathbf{I}), \\ \frac{dE}{dt} &= f_2(x, \mathbf{E}, \mathbf{I}), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{I} \in \mathbb{R}^r, \\ \frac{dI}{dt} &= f_3(x, \mathbf{E}, \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

sistemi ele alınsın ve sistem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, \mathbf{I}), \\ \frac{dI}{dt} &= G(x, \mathbf{I}), \quad G(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{I} \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

olacak şekilde yeniden yazılsın. Burada  $x$  enfekte olmayan bireyleri,  $\mathbf{I}$  enfekte olan bireyleri temsil etmektedir.

$U_0 = (x^*, 0)$  sistem (4.19)'un hastalısız denge noktası olsun ve aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin:

- $\frac{dx}{dt} = F(x, 0)$ ,  $x^*$  global asimptotik kararlı
- $G(x, \mathbf{I}) = A\mathbf{I} - \hat{G}(x, \mathbf{I})$ ,  $\hat{G}(x, \mathbf{I}) \geq 0$  ( $x, I$ )  $\in \Omega$ . Burada  $A = D_I G(x^*, 0)$  ve bir M-matristir.  $\Omega$ , modelin biyolojik olarak anlamlı olduğu bölgedir.

**Teorem 4.4.1.** Eğer  $R_0 \leq 1$  ise  $U_0 = (x^*, 0)$  global asimptotik kararlıdır.

Yöntem (4.3) sistemine uygulandığında önce hastalısız denge noktasının ( $E_0$ ) yerel asimptotik kararlı olduğunu göstermek gerekmektedir. Teorem (4.3.1) gereği hastalısız denge noktasının kararlı olduğu aşıkardır.  $F(x, 0)$ ,  $\frac{dx}{dt} = F(x, \mathbf{I})$ 'nın bir limit sistemi olduğundan  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = x^*$  dır. Bundan dolayı  $x^*$  global asimptotik kararlıdır.

(4.3) sistemi için ikinci koşula bakılacak olursa  $x = (S, R)$ ,  $\mathbf{E} = E$ ,  $\mathbf{I} = (I, D)$  şeklindedir.  $A$  ve  $\hat{G}(x, \mathbf{I})$ ;

$$A = \begin{pmatrix} -(\kappa + \lambda + \mu) & 0 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ve

$$\begin{aligned}\hat{G}(x, \mathbf{I}) &= A\mathbf{I} - G(x, \mathbf{I}) \\ &= \begin{pmatrix} -(\kappa + \lambda + \mu)I & \\ & \kappa I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma E - (\kappa + \lambda + \mu)I & \\ & \kappa I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\gamma E & \\ & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

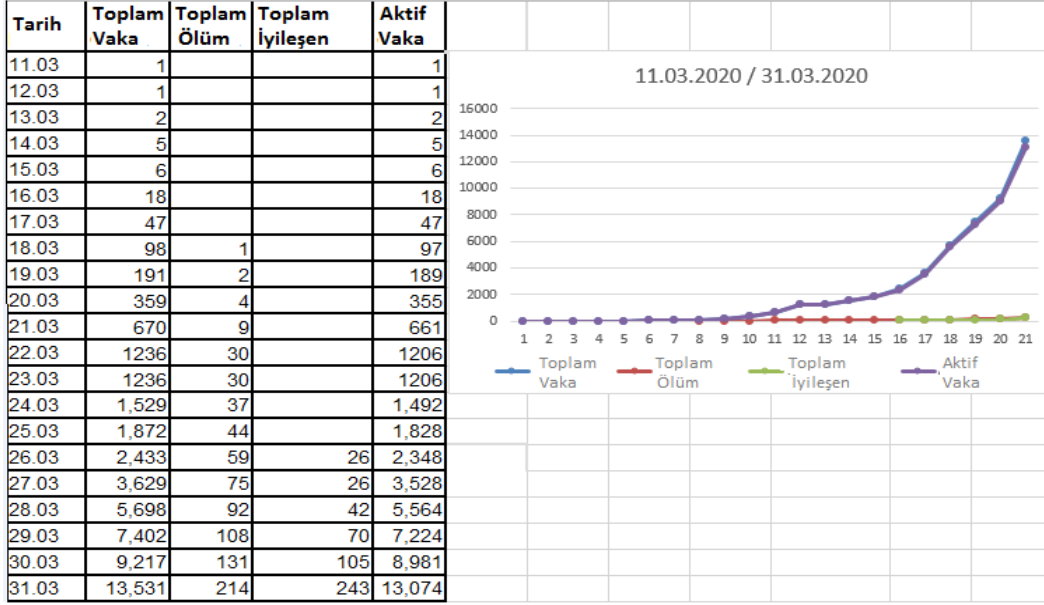
şeklinde hesaplanmıştır.  $s^* = \frac{b}{\mu}$  ve  $S, E, I, R$  ;  $\Omega$  bölgesinde olduğundan  $S(0) \geq S$  dir. Yani  $A$  bir M-matristir.  $G(x, \mathbf{I}) \geq 0$  her zaman geçerlidir.

$$\Omega = \{(S, E, I, R) : S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}.$$

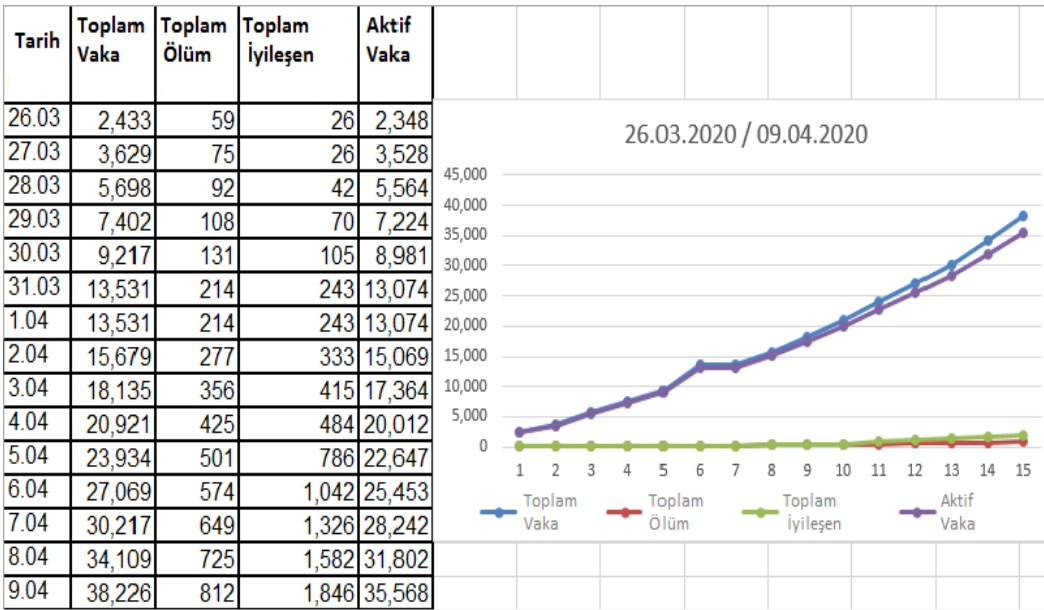
$R_0 > 1$  endemik dengenin ( $E_1$ ) var olma koşulu olan  $s^* < \frac{b}{\mu}$  ye eşdeğer olduğundan  $E_1$ 'nin ancak ve ancak  $R_0 > 1$  ise var olduğu söylenebilir. Endemik dengenin kararlılığı teorem (4.3.2)'de gösterilmiştir. Böylece  $R_0 < 1$  olduğundan hastalısız denge noktası  $E_0$ 'nin global olarak kararlı olduğu elde edilir. Aksi takdirde  $E_0$  kararsızdır ve  $E_1$  endemik denge noktası mevcuttur ve yerel olarak kararlıdır. Bu da hastalısız dengenin global kararlı olduğunu göstermektedir.

#### 4.5. Sayısal Simülasyonlar

Bu kısımda, Türkiye'de COVID-19 yayılımının davranışını anlamak için (4.3) kesirli merteye SEIRD dinamik modeli sayısal olarak simüle edilmektedir. Kesirli sistem (4.3)'ün çözümünü tahmin etmek için MATLAB içinde Adams-Bashforth-Moulton yöntemi kullanılmıştır (Diethelm, 2002). Ayrıca kesirli diferansiyel denklemler için kullanışlı olan Predictor-corrector PECE yöntemi yardımıyla kesirli modelin sayısal simülasyonları elde edilmiştir (Garrappa, 2011). (4.1) sisteminin parametreleri ve kesirli versiyonu, iki haftalık aralıklarla altı zaman dilimine bölünerek tahmin edilmektedir. WHO tarafından ilan edilen, Türkiye Sağlık Bakanlığına göre Türkiye'de ilk resmî pozitif vaka 11 Mart 2020 tarihinde tespit edilmesinden dolayı bu periyotlar bu tarihte başlamaktadır. 2020 yılında yaklaşık üç aydan oluşan dinamik sistemin tüm periyotları 11 Mart - 5 Haziran arasındadır. Türkiye Sağlık Bakanlığında elde edilebilecek net bir veri olmadığı için sonraki günler doğru bir şekilde simüle edilememiştir. Modelin dinamik davranışları dünya ölçeğinden her gün 12.00 - 13.00 saatleri arasında toplanan Türkiye için gerçek günlük veriler kullanılarak kalibre edilmiştir. Tüm periyotlarda toplanan veri seti ve bunların zamana bağlı grafikleri aşağıda yer alan Şekil 4.2 - 4.7'de verilmiştir.

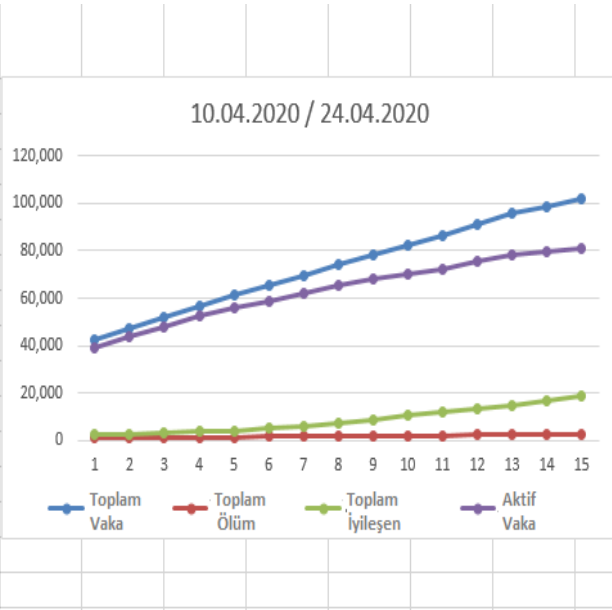


**Şekil 4.2.** 11 Mart - 31 Mart 2020 tarihleri arasında halka rapor edilen nCovid-19 enfeksiyon vakaları (Ölüm, İyileşen, Aktif vakalar ve Toplam vakalar) ve bunların grafik gösterimleri.



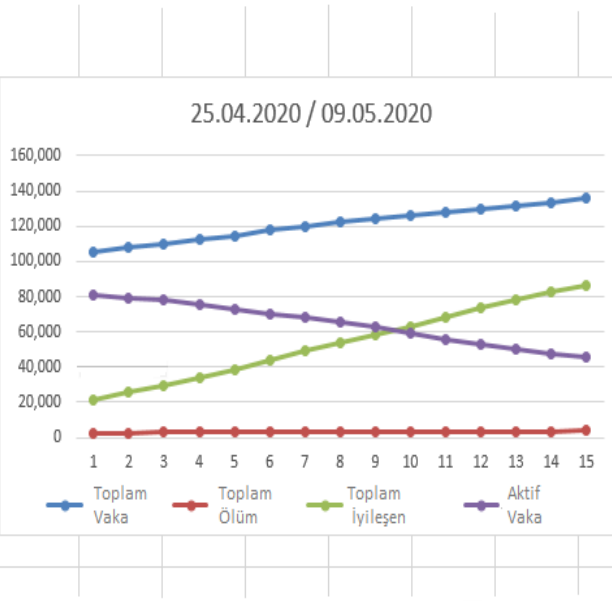
**Şekil 4.3.** 26 Mart - 9 Nisan 2020 tarihleri arasında halka rapor edilen nCovid-19 enfeksiyon vakaları (Ölüm, İyileşen, Aktif vakalar ve Toplam vakalar) ve bunların grafik gösterimleri.

Tarih	Toplam Vaka	Toplam Ölüm	Toplam İyileşen	Aktif Vaka
10.04	42,282	908	2,142	39,232
11.04	47,029	1,006	2,423	43,600
12.04	52,167	1,101	2,965	48,101
13.04	56,956	1,198	3,446	52,312
14.04	61,049	1,296	3,957	55,796
15.04	65,111	1,403	4,799	58,909
16.04	69,392	1,518	5,674	62,200
17.04	74,193	1,643	7,089	65,461
18.04	78,546	1,769	8,631	68,146
19.04	82,329	1,890	10,453	69,986
20.04	86,306	2,017	11,976	72,313
21.04	90,980	2,140	13,430	75,410
22.04	95,591	2,259	14,918	78,414
23.04	98,674	2,376	16,477	79,821
24.04	101,790	2,491	18,491	80,808



**Şekil 4.4.** 10 Nisan - 24 Nisan 2020 tarihleri arasında halka rapor edilen nCovid-19 enfeksiyon vakaları (Ölüm, İyileşen, Aktif vakalar ve Toplam vakalar) ve bunların grafik gösterimleri.

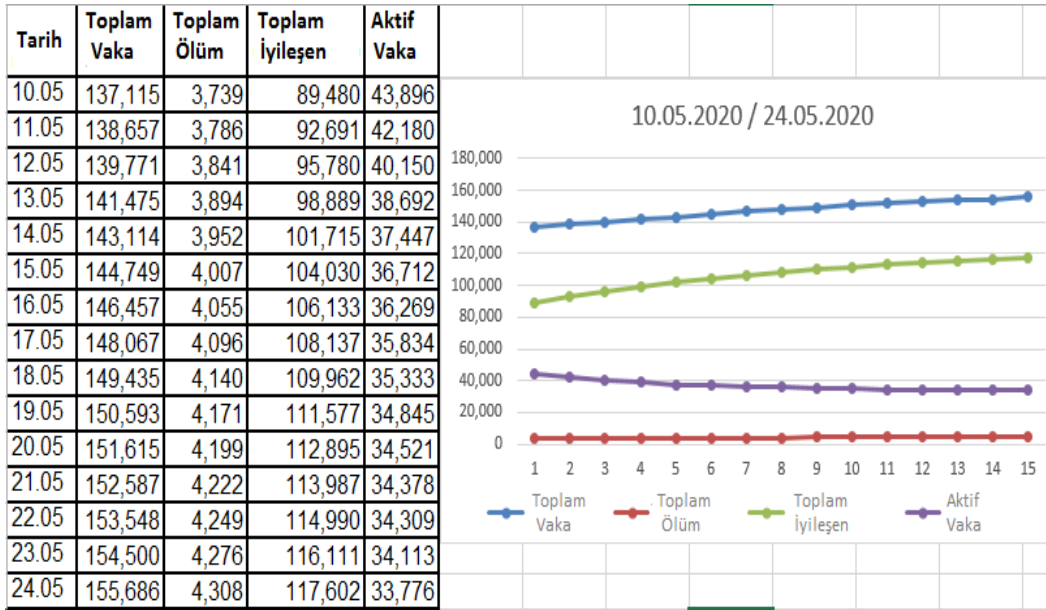
Tarih	Toplam Vaka	Toplam Ölüm	Toplam İyileşen	Aktif Vaka
25.04	104,912	2,600	21,737	80,575
26.04	107,773	2,706	25,582	79,485
27.04	110,130	2,805	29,140	78,185
28.04	112,261	2,900	33,791	75,570
29.04	114,653	2,992	38,809	72,852
30.04	117,589	3,081	44,040	70,468
1.05	120,204	3,174	48,886	68,144
2.05	122,392	3,258	53,808	65,326
3.05	124,375	3,336	58,259	62,780
4.05	126,045	3,397	63,151	59,497
5.05	127,659	3,461	68,166	56,032
6.05	129,491	3,520	73,285	52,686
7.05	131,744	3,584	78,202	49,958
8.05	133,721	3,641	82,984	47,096
9.05	135,569	3,689	86,396	45,484



**Şekil 4.5.** 25 Nisan - 9 Mayıs 2020 tarihleri arasında halka rapor edilen nCovid-19 enfeksiyon vakaları (Ölüm, İyileşen, Aktif vakalar ve Toplam vakalar) ve bunların grafik gösterimleri.

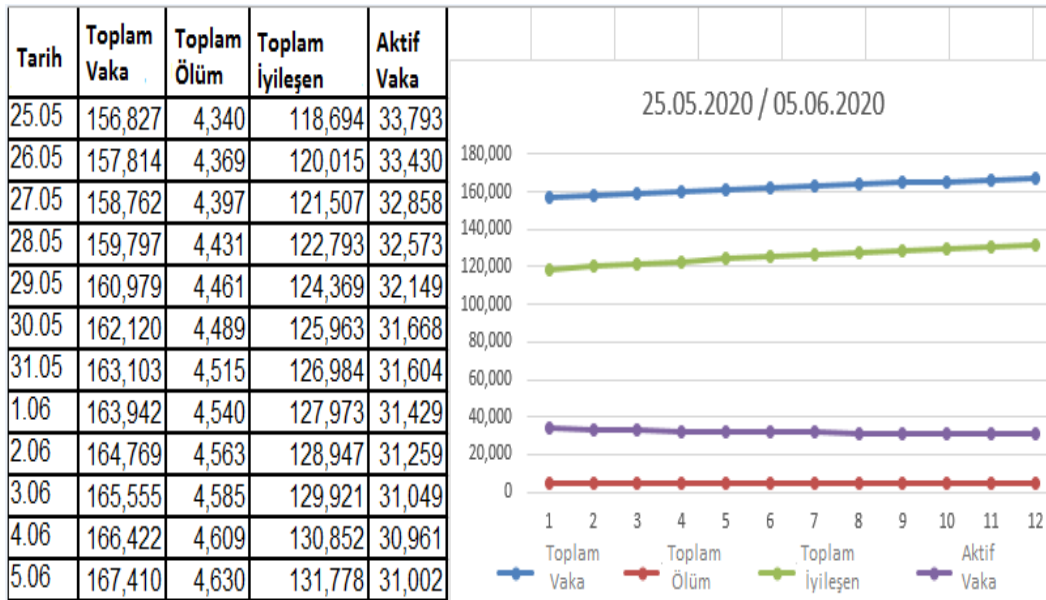
Aktif vaka hızlıca düştüğü için  $R_0$ 'ın 1'in altında çıkması gerektiği buradan daha net görülmektedir.





**Şekil 4.6.** 10 Mayıs - 24 Mayıs 2020 tarihleri arasında halka rapor edilen nCovid-19 enfeksiyon vakaları (Ölüm, İyileşen, Aktif vakalar ve Toplam vakalar) ve bunların grafik gösterimleri.

10 Mayıs - 24 Mayıs 2020 arasında aktif vaka azalışının durduğu görülmektedir. Bu nedenle  $R_0$  yeniden yükselmeye başlamıştır.



**Şekil 4.7.** 25 Mayıs - 5 Haziran 2020 tarihleri arasında halka rapor edilen nCovid-19 enfeksiyon vakaları (Ölüm, İyileşen, Aktif vakalar ve Toplam vakalar) ve bunların grafik gösterimleri.

25 Mayıs - 5 Haziran 2020 arasında aktif vaka azalışının durduğu görülmektedir. Bu

nedenle  $R_0$  yeniden yükselmeye başlamıştır.

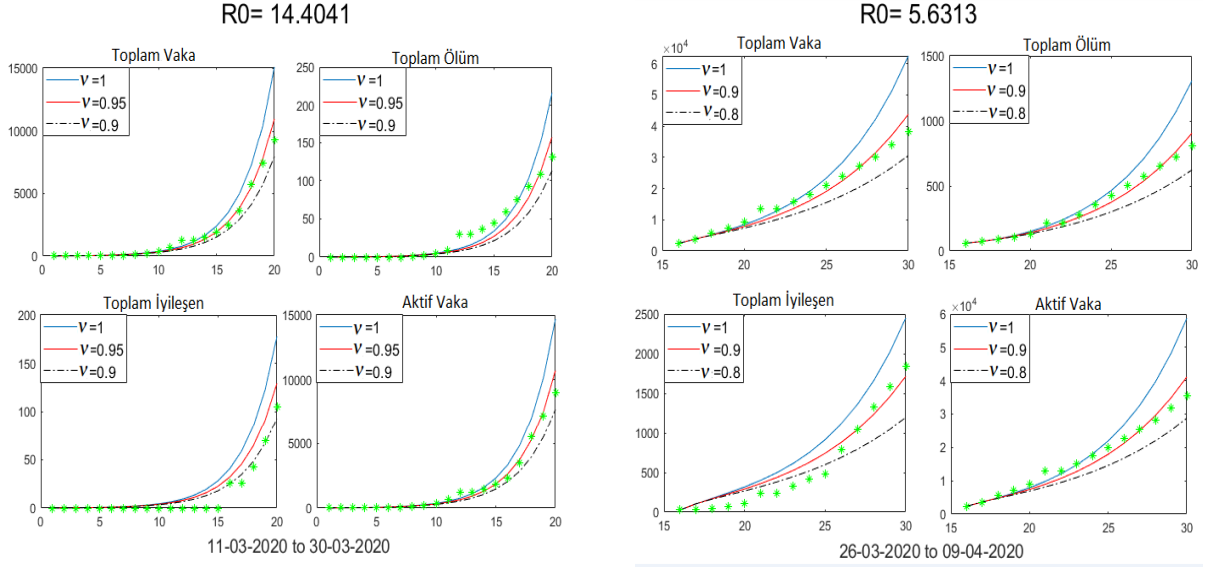
Daha önce bahsedildiği gibi kesirli mertebeden modelleme, dinamik modellere göre daha gerçekçi ve daha iyi kabul gören çalışmalar sağlar. Önerilen kesirli modelde enfeksiyona ait ölüm ve iyileşme oranlarının tahmin edilen yere bağlı olmayışı sebebi ile doğal ölüm oranları dışında hiçbir parametre sabitlenmemiştir. Kesirli modelin simülasyonları, ilk periyotta net veri olmamasına rağmen esnekliği nedeniyle tüm periyotlarda gerçek durumları başarıyla yakalamıştır ve dördüncü periyotta aktif vakaların dönüm noktası söz konusudur. Başlangıçta kabul edilen parametre aralıkları ve önerilen modelin her dönemine ait ayrı ayrı tahmin edilen parametre değerlerinin yer aldığı Tablo 4.1’de aktif vaka sayısı arttıkça iyileşme ve kuluçka oranları değerlerinin arttığını, aktif vaka sayısı azaldıkça azaldığını göstermektedir. Diğer yandan, enfeksiyon ve ölüm oranları değerleri tüm dönem boyunca azalmaktadır. Bağışıklık oranındaki değişiklik, neredeyse 0’a gittiği yerde keskin bir şekilde azalmaktadır. Bu veriler, bireylerin zamanla bu hastalığa karşı önlemlerini artırdığı şeklinde yorumlanabilir.

Enfeksiyonun tahmin aralığı, ölüm oranı ve iyileşme oranları tahmin edilen yere göre değişmektedir. Bu nedenle, Türkiye’de doğum ve doğal ölüm oranları dışında hiçbir parametre sabitlenmemiştir.

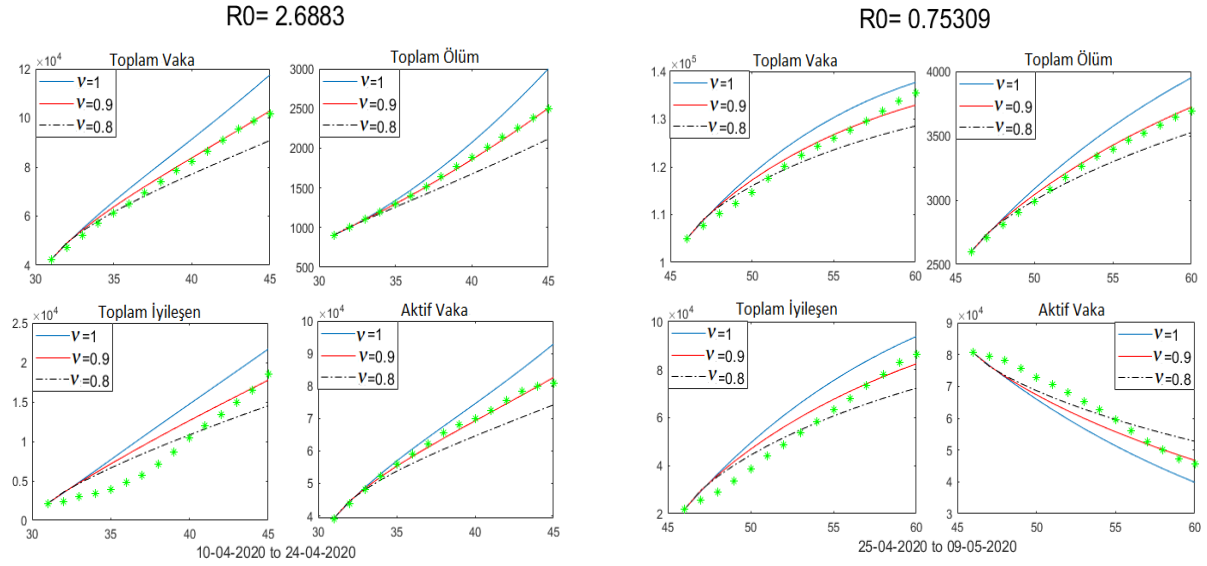
**Tablo 4.1.** Türkiye’deki resmi vaka sayıları kullanılarak sistem (4.3)’ün tahmin edilen parametreleri.

Günler	$\beta$	$\gamma$	$\lambda$	$\kappa$	$\delta$
[1,20]	1.6	1/8	1/60	1/180	1
[16,30]	0.6	1/7	1/20	1/220	1
[31,45]	0.102	1/6	1/26	1/450	0.1
[46,60]	0.02	1/12	1/10	1/600	0.001
[61,87]	0.05	1/22	1/16	1/750	0.00001
[66,87]	0.05	1/24	1/19	1/830	0.000001

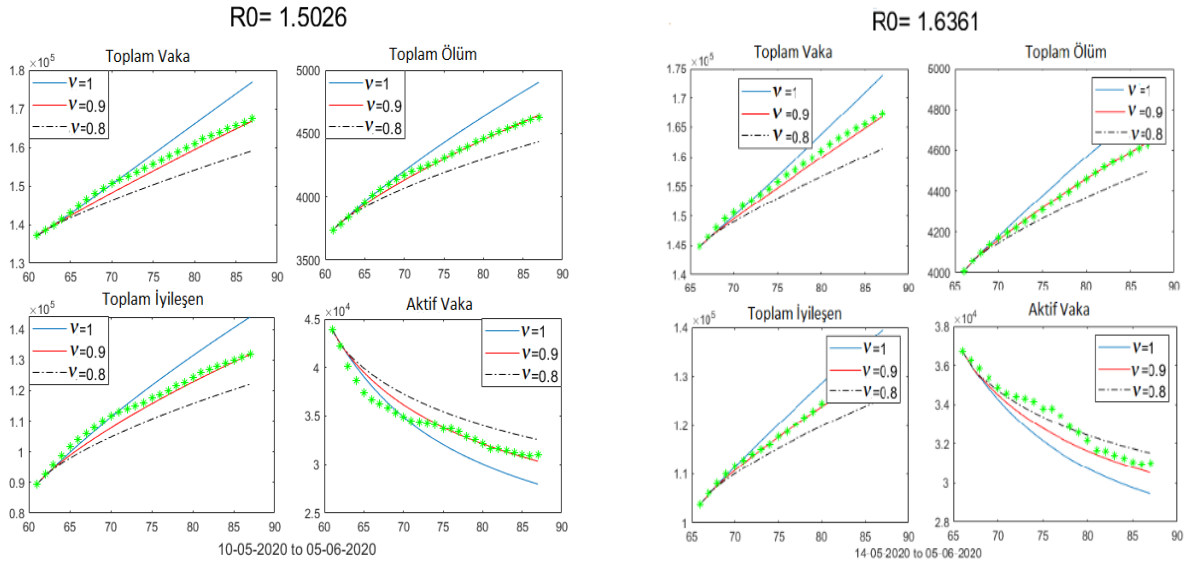
(4.3) kesirli dinamik sistemine ilişkin Tablo 4.1’de verilen parametreler Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10’da gösterilmektedir. Yeşil yıldızlar gerçek vakaları temsil etmektedir ve gözlemlenenler de renkli çizgilerle 1, 0.95, 0.9 ve 0.8 gibi birçok kesirli mertebeye değerlerini göstermektedir. Parametrelerde değişiklikler olsa bile, kesirli mertebeden dinamik model esnekliği sebebi ile gerçek değerlerin yansıtılmasını kolaylaştırmaktadır.



**Şekil 4.8.** Tablo 4.1’de kullanılan parametreler için (4.3) sisteminin [1,20] ve [16,30] günleri arasındaki dinamik davranışını temsil etmektedir.



**Şekil 4.9.** Tablo 4.1’de kullanılan parametreler için (4.3) sisteminin [31,45] ve [46,60] günleri arasındaki dinamik davranışını temsil etmektedir.



**Şekil 4.10.** Tablo 4.1’de kullanılan parametreler için (4.3) sisteminin [61,87] ve [66,87] günleri arasındaki dinamik davranışını temsil etmektedir.

(4.3) kesirli mertebeli SEIRD dinamik modelin kararlılığı zamanla değişen parametrelere bağlıdır. Çeşitli zaman aralıklarındaki farklı parametrelerin değerleri kararlılığın denge noktalarının değişmesine neden olmaktadır. Tablodaki sonuçlar değerlendirildiğinde parametrelerin uygun ortalama değerleri  $(\beta, \gamma, \lambda, \kappa, \delta) = (0.25, 0.1, 0.075, 0.0028, 0.04)$  olarak seçilmiştir. Bu parametre değerleri kullanılarak endemik denge noktası  $E_1 = (0.3113, 0.0105, 0.0134, 0.0252)$  olarak elde edilmektedir. Türkiye’de uzun zamandır devam eden Covid-19’un dinamiklerini gösteren (4.8)  $E_1$  denge noktasının kararlılığı,  $R_0 = 3.0448 > 1$  olduğundan Teorem 4.3.2’ye bağlı olarak global asimptotik karardır.

## 5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tezde kesirli mertebeden sistemler ve kararlılık analizleri üzerine çalışılmıştır. Öncelikle kesirli hesap ve kesirli mertebeden dinamik sistemler tanıtılmıştır. Ayrıca kararlılık analizleri için gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Kesirli mertebeden sistemlerin kararlılık analizi için yöntemler, kullanılan kesirli türevin çeşidine göre ayrı ayrı sunulmuştur.

Kesirli dinamik sistemlerin kararlılık analizine bir uygulama olarak Covid-19 salgın hastalığının yayılımının matematiksel olarak modellenmesinde kullanılan bir SEIRD tipi kesirli dinamik sistem modeli önerilmiş ve önerilen modelin denge noktalarının kararlılık analizi üzerinde durulmuştur. Hastalısız ve endemik dengelerin kararlılıkları sırasıyla Routh-Hurwitz ve Lyapunov kararlılık teorileri ile analiz edilmiştir. Bir matematiksel modelin temel üreme sayısı, salgının artıp azalması hakkında oldukça önemli bilgiler sunmaktadır. Sistemin temel üreme sayısı birden küçük olduğunda hastalısız denge noktasının var olduğu ve asimptotik olarak kararlı olduğu kanıtlanmıştır. Birden fazla olduğunda, aynı zamanda asimptotik olarak kararlı olan tek bir endemik kararlı durum noktası vardır. Kesirli mertebeye matematiksel modelin geçmişten gelen tüm bilgileri entegre etmesi nedeniyle kesirli mertebeden türevlerin daha gerçekçi tahminler sağladığı gözlemlenmiştir. 6 periyotta yaklaşık 15 günlük aralıklarla gösterdiği sayısal simülasyondan sistemin kararlılık konumuna ulaşmak için daha fazla aralık süresine ihtiyacı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla nümerik sonuçlar ve kararlılık sonuçlarından kesirli mertebeden modellerin parametrelerine bağlı olduğu görülmüştür. Sonuç olarak mevcut kesirli mertebeye dinamik analiz, Türkiye'deki nCOVID-19 hastalık çalışmaları için veri analizine yardımcı olabileceği ve kontrolü sağlayabileceği anlaşılabilir.

## KAYNAKÇA

**Abel, N. H.** (1881). *Oeuvres Completes de Niels Henrik Abel: Mémoires publiés par Abel, I*, Grøndahl.

**Allen, L. J. S.** (2007). *Introduction to Mathematical Biology*, Pearson/Prentice Hall.

**Baskonus, H. M., & Bulut, H.** (2015). On the Numerical Solutions of Some Fractional Ordinary Differential Equations by Fractional Adams-Bashforth-Moulton Method. *Open Mathematics*, 13(1), De Gruyter Open.

**Berman, A., & Plemmons, R. J.** (1994). *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM.

**Caputo, M.** (1967). Linear Models of Dissipation whose  $Q$  is almost Frequency Independent—II. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, 13(5), 529-539.

**Castillo-Chavez, C., Feng, Z., & Huang, W.** (2002). On the Computation of  $R_0$  and Its Role on. *Mathematical approaches for emerging and reemerging infectious diseases: an introduction, I*, 229.

**Chavez-Castillo, C. Feng, Z., & Huang, W.** (2002). On the Computation of  $R_0$  and Its Role on Global Stability. *Mathematical Approaches for Emerging and Re-emerging Infection Diseases: An Introduction*, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, 125, 31-65

**Chen, Y. Q., Petras, I., & Xue, D.** (2009). Fractional-Order Control-a Tutorial, *American control conference*, IEEE, s.1397-1411.

**Das, P., Gazi, N. H., Das, K., & Mukherjee, D.** (2014). Stability Analysis of Swine Flu Transmission-A Mathematical Approach. *Comput. Math. Biol*, 3(1).

**Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Metz, J. A. J.** (1990). On the Definition and the Computation of the Basic Reproduction Ratio  $R_0$  in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations. *Journal of mathematical biology*, Springer, 28(4),365-382.

**Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D.** (2002). A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations. *Nonlinear Dynamics*, Springer, 29(1), 3-22.

- Diethelm, K., & Ford, N. J.** (2022). Analysis of Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, 265(2), 229-248.
- Euler, L.** (1730). Memoire dans le tome V des Comment. *Saint Petersberg Annees*, 55.
- Fourier, J. B. J.** (1820). Traité analytique de la chaleur. *Paris: Didot*, 49.
- Frank MacFarlane Burnet, S., Burnet, F. M., Burnet, M., & White, D. O.** (1972). *Natural History of Infectious Disease*, CUP Archive.
- Garrappa, R.** (2011) Predictor-Corrector PECE Method for Fractional Differential Equations. *MATLAB Central File Exchange*.
- Heesterbeek, J. A. P., & Dietz, K.** (1996). The Concept of  $R_0$  in Epidemic Theory. *Statistica neerlandica*, Wiley Online Library, 50(1), 89-110.
- Heffernan, J. M., Smith, R. J., & Wahl, L. M.** (2005). Perspectives on the Basic Reproductive Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*, The Royal Society London, 2(4), 281-293.
- Huo, H. F., Chen, R., & Wang, X. Y.** (2016). Modelling and Stability of HIV/AIDS Epidemic Model with Treatment. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, 40(13-14), 6550-6559.
- LaSalle, J. P.** (1976). *The Stability of Dynamical Systems*, SIAM.
- Li, Y., Chen, Y. Q., & Podlubny, I.** (2010). Stability of Fractional-Order Nonlinear Dynamic Systems: Lyapunov Direct Method and Generalized Mittag-Leffler Stability. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, 59(5), 1810-1821.
- Li, J., & Blakeley, D.** (2011). The Failure of  $R_0$ . *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, Hindaw, 2011.
- Liouville, J.** (1834). Mé moire sur une formule d'analyse, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York.
- Lyapunov, A. M.** (1992). The General Problem of the Stability of Motion. *International journal of control*, 55(3), Taylor & Francis, 531-534.
- Matignon, D.** (1996). Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing. *Computational engineering in systems applications*, Citeseer, 2(1) s. 963-968.

- Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., & Nanot, F. M.** (2000). Frequency-band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE, 47(1), 25-39.
- Perko, L.** (2013). *Differential Equations and Dynamical Systems*. 7. Springer Science & Business Media.
- Petras, I.** (2008). Stability of Fractional-Order Systems with Rational Orders. *arXiv preprint arXiv:0811.4102* .
- Podlubny, I.** (1994). Fractional-Order Systems and Fractional-Order Controllers. *Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Kosice*, 12(3), 1-18.
- Podlubny, I.** (1999). *Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego, Calif, USA.
- Qian, D., Li, C., Agarwal, R. P., & Wong, P. J. Y.**(2010). Stability Analysis of Fractional Differential System with Riemann-Liouville Derivative. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, 52(5-6), 862-874.
- Sabatier, J., Moze, M., & Farges, C.** (2010). LMI Stability Conditions for Fractional Order Systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, 59(5), 1594-1609.
- Saeed, R. M.** (2017). Achieve Asymptotic Stability Using Lyapunov's Second Method.
- Simon, C. P., & Blume, L.** (1994). *Mathematics for Economists*, 7. New York: Norton.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J.** (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical biosciences*, Elsevier, 180(1-2), 29-48.
- Van den Driessche, P., & Watmough, J.** (2008). Further Notes on the Basic Reproduction Number. *Mathematical epidemiology*, Springer, 159-178.
- World Health Organization** (2020). Coronavirus Disease (COVID-19) Outbreak Situation. [Erişim: 01.01.2020, <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>]